Wacław Sierpiński – badacz nieskończoności

Piotr ZAKRZEWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Na grobie Wacława Sierpińskiego w Alei Zasłużonych na warszawskich Powązkach widnieje napis „Badacz nieskończoności". Badaniem nieskończoności, a ściślej – zbiorów nieskończonych, zajmuje się teoria mnogości (*mnogość* to archaiczne określenie zbioru), której właśnie poświęcona jest duża część dorobku Sierpińskiego.

Kluczową rolę w teorii mnogości odgrywa porównywanie zbiorów nieskończonych pod względem mocy, czyli pod względem ich „liczebności". I tak, zbiory A i B są *tej samej mocy* (są *równoliczne*, co oznaczamy $|A| = |B|$), jeśli istnieje funkcja wzajemnie jednoznacznie przekształcająca jeden z nich na drugi (czyli łącząca ich elementy w rozłączne pary: każdy element zbioru A z dokładnie jednym elementem zbioru B tak, by żaden element zbioru B nie pozostał bez pary). Z kolei zbiór A jest mocy co najwyżej takiej jak B (oznaczenie: $|A| \leqslant |B|$), jeśli jest równoliczny z jakimś podzbiorem zbioru B. W końcu, zbiór A jest mocy mniejszej niż B (oznaczenie: $|A| < |B|$), jeśli $|A| \leqslant |B|$, ale nie jest prawdą, że $|A| = |B|$. Zbiory skończone lub równoliczne ze zbiorem $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ liczb naturalnych to zbiory przeliczalne (wśród nich jest zbiór $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych), pozostałe zbiory są nieprzeliczalne (wśród nich jest zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych).

Okazuje się, że każde dwa zbiory można porównać pod względem mocy: dla dowolnych zbiorów A i B mamy albo $|A| \leqslant |B|$, albo $|B| < |A|$ (i warunki te się wykluczają). Ponadto $\mathbb{N}$ jest zbiorem najmniejszej mocy nieskończonej: jeśli zbiór B jest nieskończony, to $|\mathbb{N}| \leqslant |B|$, bo sukcesywnie wybierając coraz to nowe elementy zbioru B, dostaniemy nieskończony i różnowartościowy ciąg o wyrazach z B. Zbiory najmniejszej mocy nieskończonej, czyli zbiory równoliczne z $\mathbb{N}$, nazywamy też zbiorami mocy $\aleph_0$ (czytamy: „alef zero"; zamiast pisać $|A| = |\mathbb{N}|$, piszemy też $|A| = \aleph_0$).

Istnieją również zbiory najmniejszej mocy nieprzeliczalnej – nazywamy je zbiorami mocy $\aleph_1$ (czytamy: „alef jeden") i piszemy np. $|A| = \aleph_1$, jeśli zbiór A jest nieprzeliczalny i dla każdego zbioru nieprzeliczalnego B zachodzi warunek $|A| \leqslant |B|$. Właśnie takim zbiorom oraz ich związkom ze zbiorem $\mathbb{R}$ wiele uwagi poświęcił Wacław Sierpiński.

Jak można sobie wyobrazić zbiór mocy $\aleph_1$? W podejściu, które tu – wykorzystując pomysły Sierpińskiego – przedstawimy, kluczowe okazuje się pojęcie łańcucha zbiorów.

Powiemy, że rodzina zbiorów $\mathcal{L}$ jest *łańcuchem*, jeśli każde dwa zbiory A i B z $\mathcal{L}$ można porównać w sensie zawierania: $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$. Dla oswojenia się z tym pojęciem przyjrzyjmy się następującemu przykładowi. Niech rodzina $\mathcal{L}_0$ składa się ze wszystkich zbiorów postaci $O_n = \{i \in \mathbb{N} : i < n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wszystkie zbiory należące do $\mathcal{L}_0$ są skończone, a dodatkowo łańcuch ten ma pewną interesującą własność: jest *maksymalny* wśród wszystkich łańcuchów, których elementami są skończone podzbiory $\mathbb{R}$: jeśli $F \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem skończonym spoza $\mathcal{L}_0$, to F nie jest porównywalny w sensie zawierania z pewnym zbiorem A z $\mathcal{L}_0$ (a więc nie istnieje łańcuch skończonych podzbiorów $\mathbb{R}$, którego $\mathcal{L}_0$ jest właściwą podrodziną – to właśnie znaczy maksymalność $\mathcal{L}_0$). Istotnie, załóżmy, że skończony zbiór $F \subseteq \mathbb{R}$ nie należy do $\mathcal{L}_0$, ale jest porównywalny z każdym zbiorem O_n. Oczywiście nie może wtedy być tak, że $O_n \subseteq F$ dla każdego n, bo wtedy F zawierałby cały zbiór liczb naturalnych i nie byłby skończony. Niech więc m będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $O_m \not\subseteq F$. Wtedy $m > 0$ (bo $O_0 = \emptyset \subseteq F$) i z jednej strony mamy $O_{m-1} \subseteq F$, a z drugiej – $F \subsetneq O_m$ (bo F jest porównywalny z O_m i $O_m \not\subseteq F$), skąd wynika, że $F = O_{m-1}$, czyli $F \in \mathcal{L}_0$, wbrew założeniu.

Przypominamy znaczenie symboli:
$\subseteq$: „zawiera się",
$\not\subseteq$: „nie zawiera się",
$\subsetneq$: „zawiera się, ale nie jest równe".

Łańcuch $\mathcal{L}_0$ nie jest oczywiście maksymalny wśród łańcuchów przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$, bo np. zbiór $\mathbb{N}$ nie należy do $\mathcal{L}_0$, ale jest nadzbiorem każdego zbioru O_n. *Zasada maksimum Hausdorffa*, udowodniona przez Felixa Hausdorffa (1914 r.), gwarantuje jednak możliwość powiększenia każdego łańcucha przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$ do maksymalnego takiego łańcucha. Nasz

Rozwiązanie zadania M 1704.
Po przemnożeniu przez km pozostaje do wykazania nierówność

$$k^2m^2 - k^2 - m^2 + 1 \leqslant k^2m^2 - 2km,$$

która jest równoważna nierówności $1 \leqslant (k-m)^2$. Oczywiście ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych różnych liczb całkowitych dodatnich k i m oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|k-m| = 1$.

Uwaga: Polecamy wykorzystać to zadanie do rozwiązania zadania 5 z finału LXIV Olimpiady Matematycznej.

przykładowy zbiór mocy $\aleph_1$ będzie właśnie – zgodnie z jednym z pomysłów Sierpińskiego, które tu wykorzystujemy – zdefiniowany z pomocą maksymalnego łańcucha $\mathcal{L}_1$ przeliczalnych podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$. Możemy na przykład, korzystając z zasady maksimum Hausdorffa, rozszerzyć $\mathcal{L}_0$ do takiego łańcucha, istotne jest jednak tylko to, że łańcuch $\mathcal{L}_1$ składa się ze zbiorów przeliczalnych i jest maksymalny wśród takich łańcuchów podzbiorów $\mathbb{R}$. Definiujemy zbiór $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}$ (oznaczenie Ω_1 zostało przyjęte na potrzeby tego artykułu) jako sumę wszystkich zbiorów tworzących $\mathcal{L}_1$. Pokażmy teraz, że $|\Omega_1| = \aleph_1$.

Po pierwsze zauważmy, że Ω_1 jest zbiorem nieprzeliczalnym. To wynika natychmiast z maksymalności łańcucha $\mathcal{L}_1$. Gdyby bowiem zbiór Ω_1 był przeliczalny, to biorąc $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1$, dostalibyśmy przeliczalny zbiór $\Omega_1 \cup \{x\}$, przeczący maksymalności $\mathcal{L}_1$, bo każdy zbiór należący do $\mathcal{L}_1$ byłby jego właściwym podzbiorem.

Weźmy teraz dowolny zbiór nieprzeliczalny B. Chcemy pokazać, że $|\Omega_1| \leqslant |B|$. Przypuśćmy więc, że jest przeciwnie, czyli $|B| < |\Omega_1|$, i niech $T \subseteq \Omega_1$ będzie zbiorem równolicznym z B; w szczególności T jest nieprzeliczalny oraz $|T| < |\Omega_1|$. Skoro Ω_1 jest sumą wszystkich zbiorów tworzących $\mathcal{L}_1$, to dla każdej liczby $x \in \Omega_1$ możemy wybrać zbiór $A_x \in \mathcal{L}_1$ taki, że $x \in A_x$. Zauważmy, że Ω_1 jest także sumą wszystkich tych zbiorów postaci A_x, że $x \in T$. Istotnie, gdyby pewna liczba $y \in \Omega_1$ była poza wszystkimi takimi zbiorami, to dla każdego $x \in T$ mielibyśmy $A_y \not\subseteq A_x$ (bo $y \in A_y \setminus A_x$), a więc $A_x \subseteq A_y$, bo zbiory A_x i A_y będąc elementami łańcucha $\mathcal{L}_1$, są porównywalne w sensie zawierania. W szczególności dostalibyśmy więc, że $T \subseteq A_y$, co jest niemożliwe, bo zbiór T jest nieprzeliczalny. Przedstawiliśmy zatem zbiór Ω_1 w postaci sumy rodziny przeliczalnych zbiorów postaci A_x, gdzie $x \in T$, których jest mniej niż Ω_1, bo $|T| < |\Omega_1|$. To jest jednak niemożliwe, bo zbiory nieprzeliczalne spełniają następującą „zasadę szufladkową”: żaden nieprzeliczalny zbiór X nie może być sumą zbiorów z takiej rodziny R swoich podzbiorów przeliczalnych, że $|R| < |X|$ (innymi słowy, jeśli elementy nieprzeliczalnego zbioru X umieścimy w szufladkach, których w sensie mocy jest mniej niż elementów zbioru X, to w jednej z tych szufladek znajdzie się nieprzeliczalnie wiele elementów).

Wykazaliśmy więc, że istotnie Ω_1 jest zbiorem mocy $\aleph_1$ – użyjemy go w dalszej części artykułu jako modelowego przykładu zbioru tej mocy.

Hipoteza continuum

Wacław Sierpiński sporo uwagi poświęcił tzw. *hipotezie continuum* (w skrócie: CH od angielskiej nazwy *Continuum Hypothesis*), czyli sformułowanemu w 1878 r. przez jednego z twórców teorii mnogości, Georga Cantora, przypuszczeniu, że $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. W wyniku późniejszych odkryć Kurta Gödla (1939 r.) i Paula Cohena (1963 r.) wiadomo, że na gruncie powszechnie przyjętych aksjomatów teorii mnogości hipotezy continuum nie można ani udowodnić, ani obalić. W wydanej w 1934 roku monografii *Hypothèse du continu* Sierpiński w szczególności pokazał jedenaście stwierdzeń równoważnych CH, oznaczonych od P_1 do P_{11}. Przyjrzyjmy się dwóm spośród nich: P_6 i P_1.

P_6: Zbiór $\mathbb{R}$ jest sumą pewnego łańcucha swoich przeliczalnych podzbiorów.

Pokażmy najpierw, że stwierdzenie P_6 jest konsekwencją CH. Załóżmy więc, że $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Wtedy $|\Omega_1| = |\mathbb{R}|$ i niech funkcja $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ przekształca wzajemnie jednoznacznie Ω_1 na $\mathbb{R}$. Przypomnijmy, że Ω_1 jest sumą łańcucha $\mathcal{L}_1$ przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$. Jeśli teraz zdefiniujemy $\mathcal{L}$ jako rodzinę podzbiorów $\mathbb{R}$, złożoną z obrazów elementów $\mathcal{L}_1$ względem funkcji f, to $\mathcal{L}$ będzie łańcuchem przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$, którego sumą jest $\mathbb{R}$.

Na odwrót, pokażmy, że ze stwierdzenia P_6 wynika CH. Załóżmy więc, że $\mathbb{R}$ jest sumą łańcucha swoich przeliczalnych podzbiorów i (posługując się np. wspomnianą wcześniej zasadą maksimum Hausdorffa) rozszerzmy ten łańcuch do maksymalnego łańcucha $\mathcal{L}$ przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$. Wtedy jednak, powtarzając dowód tego, że $|\Omega_1| = \aleph_1$, pokazujemy, że suma łańcucha $\mathcal{L}$ jest mocy $\aleph_1$. Ale ta suma jest całym zbiorem $\mathbb{R}$, co kończy dowód CH.

P_1: Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ jest sumą dwóch swoich rozłącznych podzbiorów A i B takich, że część wspólna zbioru A z każdą prostą pionową jest przeliczalna i część wspólna zbioru B z każdą prostą poziomą jest przeliczalna (dokładniej, dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zbiory $\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\}$ i $\{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in B\}$ są przeliczalne).

Znów zacznijmy od pokazania, jak stwierdzenie P_1 wynika z CH. Jak już wiemy, z założenia CH wynika prawdziwość stwierdzenia P_6. Niech więc $\mathcal{L}$ będzie łańcuchem przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$, którego sumą jest $\mathbb{R}$. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ wybierzmy zbiór $A_x \in \mathcal{L}$ taki, że $x \in A_x$ (podobnie postąpiliśmy wcześniej w dowodzie tego, że $|\Omega_1| = \aleph_1$). Zdefiniujmy zbiory A i B w następujący sposób:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in A_x\}, \quad B = \mathbb{R}^2 \setminus A.$$

Oczywiście $\mathbb{R}^2 = A \cup B$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ widzimy, że $\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\} = A_x$ jest zbiorem przeliczalnym. Ustalmy teraz $y \in \mathbb{R}$ i biorąc pod uwagę, że

$$\{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \notin A\} = \{x \in \mathbb{R} : y \notin A_x\},$$

zauważmy, że

$$\{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in B\} \subseteq A_y,$$

bo jeśli $(x,y) \in B$ (czyli $y \notin A_x$), to $A_y \not\subseteq A_x$ (bo $y \in A_y \setminus A_x$), a stąd $A_x \subseteq A_y$ (gdyż A_x i A_y należą do tego samego łańcucha $\mathcal{L}$) i w szczególności $x \in A_y$. To pokazuje, że zbiór $\{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in B\}$ jest przeliczalny, jako podzbiór przeliczalnego zbioru A_y.

Na odwrót, załóżmy teraz, że $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, gdzie A i B mają własności ze stwierdzenia P_1. Dla każdego $y \in \mathbb{R}$ oznaczmy $B^y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in B\}$ i niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną złożoną ze wszystkich zbiorów postaci B^y dla $y \in \Omega_1$. Rodzina $\mathcal{R}$ składa się z $\aleph_1$ zbiorów przeliczalnych, więc ze wspomnianej wcześniej „zasady szufladkowej” wynika, że suma S tworzących ją zbiorów nie może mieć mocy większej niż $\aleph_1$. Z drugiej jednak strony $S = \mathbb{R}$, bo w przeciwnym razie, biorąc liczbę x spoza S, dla każdego $y \in \Omega_1$ mielibyśmy $x \notin B^y$, czyli $(x,y) \notin B$, a więc, wobec równości $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $(x,y) \in A$. Tym samym jednak dostalibyśmy zawieranie

$$\Omega_1 \subseteq \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\},$$

które przeczy przeliczalności zbioru po prawej stronie powyższej inkluzji. Ostatecznie więc $\mathbb{R}$ nie może mieć mocy większej niż $\aleph_1$, zatem jako zbiór nieprzeliczalny ma moc dokładnie $\aleph_1$, co kończy dowód CH.

Znajomości w zbiorach nieskończonych

Znane *twierdzenie Ramseya*, udowodnione przez Franka P. Ramseya (1928 r.), głosi, że w każdej nieskończonej grupie osób znajdzie się nieskończenie wiele takich, że każda zna każdą, lub nieskończenie wiele takich, że żadna nie zna żadnej. Ściślej, jeśli X jest zbiorem nieskończonym, a f dowolną funkcją, która każdemu dwuelementowemu podzbiorowi zbioru X przypisuje jedynkę albo zero, to X zawiera przeliczalny nieskończony podzbiór H o tej własności, że wszystkim jego dwuelementowym podzbiorom funkcja f przypisuje tę samą liczbę.

Wacław Sierpiński podał prosty przykład pokazujący, że nieprzeliczalność zbioru X nie gwarantuje istnienia nieprzeliczalnego zbioru $H \subseteq X$ o powyższej własności. Może się więc trafić nieprzeliczalna grupa osób, w której nie ma nieprzeliczalnego grona złożonego z samych znajomych bądź z samych nieznajomych.

Dokładniej, opierając się na pomyśle Sierpińskiego, zdefiniujmy funkcję f określoną na rodzinie wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru Ω_1 o wartościach w zbiorze $\{0,1\}$ w następujący sposób.

Przypomnijmy, że Ω_1 jest sumą łańcucha $\mathcal{L}_1$ przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$, i dla każdego $x \in \Omega_1$ znów wybierzmy zbiór $A_x \in \mathcal{L}_1$ taki, że $x \in A_x$.

Dla każdej pary liczb $x, y \in \Omega_1$ takich, że $x < y$, zdefiniujmy:

$$f(\{x,y\}) = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } A_x \subseteq A_y, \\ 0, \text{ jeśli } A_y \subsetneq A_x. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja f jest określona poprawnie, bo skoro zbiory A_x i A_y pochodzą z łańcucha $\mathcal{L}_1$, to albo $A_x \subseteq A_y$, albo $A_y \subsetneq A_x$.

Niech $H \subseteq \Omega_1$ będzie dowolnym zbiorem o tej własności, że wszystkim jego dwuelementowym podzbiorom funkcja f przypisuje jedynkę. Pokażemy, że zbiór H jest przeliczalny.

Dla każdej pary $\{x,y\}$, gdzie $x, y \in H$ i $x < y$, z przedziału otwartego (x,y) wybierzmy liczbę wymierną $q_{x,y}$. Zauważmy, że zachodzi zawieranie:

$$\{z \in H : z < q_{x,y}\} \subseteq A_y.$$

Istotnie, jeśli $z, y \in H$ i $z < q_{x,y}$, to $z < y$. Ale skoro $f(z,y) = 1$, to $A_z \subseteq A_y$ i w szczególności $z \in A_y$.

Wynika stąd, że każdy zbiór postaci $\{z \in H : z < q_{x,y}\}$ jest przeliczalny. Zbiorów tych jest jednak przeliczalnie wiele (bo zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny), więc ich suma też jest zbiorem przeliczalnym (to, że taka suma nie jest zbiorem nieprzeliczalnym, wynika na przykład z wykorzystywanej przez nas już wcześniej „zasady szufladkowej”). Z drugiej strony tą sumą jest cały zbiór H, z wyjątkiem liczby największej w H, o ile taka w H istnieje. Istotnie, jeśli dla $x \in H$ istnieje liczba $y \in H$ taka, że $x < y$, to $x < q_{x,y}$. Pokazaliśmy tym samym, że zbiór H jest przeliczalny. Przy założeniu $f(\{x,y\}) = 0$ dla każdej pary $x \neq y$ liczb ze zbioru H, dowód jego przeliczalności jest analogiczny.

Warto odnotować, że Sierpiński, modyfikując powyższy argument, zdefiniował funkcję, która każdemu dwuelementowemu podzbiorowi całego zbioru $\mathbb{R}$ przypisuje jedynkę albo zero w taki sposób, że każdy zbiór $H \subseteq \mathbb{R}$ o tej własności, że wszystkim jego dwuelementowym podzbiorom funkcja przypisuje tę samą wartość, jest przeliczalny. Okazuje się natomiast, jak pokazali Paul Erdös i Richard Rado, że gwarancją tego, by w nieprzeliczalnej grupie osób znalazło się nieprzeliczalne grono złożone z samych znajomych bądź z samych nieznajomych, jest założenie, że ta grupa osób jest mocy większej niż $\mathbb{R}$.