Stała Eulera w trójkącie Pascala

*Karol GRYSZKA**

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

W poszukiwaniu stałych matematycznych często sięgamy po interesujące wzory lub ciekawe zależności liczbowe. Na pierwszy plan zwykle wysuwa się liczba π – stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. W tym artykule zajmiemy się jednak inną ważną stałą – liczbą Eulera e. Jest ona definiowana na dwa równoważne sposoby:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad e := \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Jest to liczba niewymierna, w przybliżeniu równa 2,7183.

Stała Eulera może być wprowadzona jako granica operacji kapitalizacji odsetek w coraz krótszych okresach. Jeśli w danym roku złożyliśmy na 100% (stopa roczna) kwotę równą 1zł i w ciągu roku następuje n okresów kapitalizacji, to po roku będziemy mieć na lokacie $(1+1/n)^n$ złotych.

Okazuje się, że liczbę e możemy odnaleźć w trójkącie Pascala. Jest to trójkątny układ liczb, taki że każda liczba jest sumą dwóch liczb stojących bezpośrednio nad nią (z wyłączeniem wierzchołka trójkąta oraz jego prawego i lewego boku, gdzie znajdują się jedynki). Na marginesie przedstawiono sześć pierwszych wierszy tego trójkąta. Jeśli przez $P(n,k)$ oznaczymy k-ty wyraz n-tego wiersza, to zachodzi dobrze znany wzór $P(n,k)=\binom{n}{k}$. Przypomnijmy, symbol Newtona $\binom{n}{k}$ definiujemy na przykład następująco: jeśli $n\geqslant 0$ i $0\leqslant k\leqslant n$, to

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Pierwszych sześć wierszy trójkąta Pascala

Rozważmy teraz iloczyny a_n wyrazów w kolejnych wierszach trójkąta Pascala:

$$a_0=1,\quad a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_3=9,\quad a_4=96,\quad a_5=2500,\quad \ldots$$

Ciąg ten sam w sobie nie jest szczególnie interesujący – jego wyrazy bardzo szybko rosną do nieskończoności.

Niech teraz $b_n=a_{n+1}/a_n$. Ciąg ten również nie wygląda specjalnie zachęcająco:

$$b_0=1,\quad b_1=2,\quad b_2=4{,}5,\quad b_3\approx 10{,}7,\quad b_4\approx 26,\quad b_5=64{,}8,\quad \ldots$$

Ponownie można pokazać, że wyrazy ciągu b_n rosną do nieskończoności.

Ostatni krok odkrywa jednak coś interesującego. Niech $c_n=b_{n+1}/b_n$. Wtedy

$$c_0=2,\ c_1=2{,}25,\ c_2\approx 2{,}37,\ c_3\approx 2{,}441,\ \ldots,c_{500}\approx 2{,}715,\ \ldots,\ c_{10000}\approx 2{,}718.$$

Okazuje się, że ciąg c_n zbiega do e (!).

Nietrudno powyższy fakt udowodnić i to właśnie teraz zrobimy. Zauważmy najpierw, że

$$\binom{n+1}{k}\Big/\binom{n}{k}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\Big/\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n+1}{n+1-k},$$

a zatem

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\prod_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}}{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}=\binom{n+1}{n+1}\prod_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}=$$

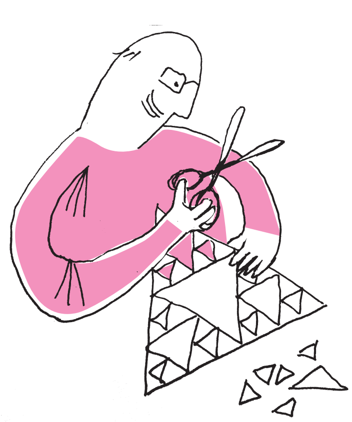
$$=\prod_{k=0}^{n}\frac{n+1}{n+1-k}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ostatecznie dostajemy

$$c_n=\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{n^n}{n!}=\frac{(n+1)^n}{n!}\Big/\frac{n^n}{n!}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Jest to nic innego jak ciąg definiujący stałą e.

Czytelnik zakłopotany powyższymi ciągami może łatwo zapamiętać regułę otrzymania wyrazów ciągu c_n dążącego do liczby e. Należy wziąć trzy kolejne wiersze, a następnie iloczyn liczb w wierszach skrajnych podzielić przez kwadrat iloczynu liczb z wiersza środkowego.



Nasza przygoda z poszukiwaniem stałej Eulera dopiero się rozpoczyna. Za miesiąc zobaczymy niezwykły fakt z teorii liczb, związany z liczbą e.