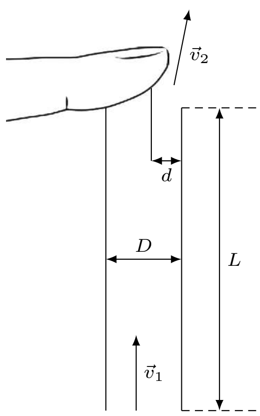
Od czego zależy wysokość strumienia wody wypływającej z węża ogrodowego?

Michał KRUPIŃSKI

Kto kiedykolwiek używał gumowego węża ogrodowego do podlewania roślin lub mycia samochodu, ten wie, że zasięg i wysokość wylatującej wody mogą być regulowane w bardzo prosty sposób. Gdy ściśniemy wylot węża lub częściowo zatkamy go palcem, woda zacznie wypływać z większą prędkością i wzniesie się wyżej. Zjawisko to jest tak powtarzalne i proste, że korzystamy z niego intuicyjnie, nie zastanawiając się, jaka jest jego przyczyna. Warto jednak choć raz zadać sobie pytanie zawarte w tytule niniejszego artykułu i zastanowić się, co powoduje, że prędkość wpływającej wody ulega tak znacznemu zwiększeniu. Na pierwszy rzut oka można sądzić, że zjawisko to wynika z prostej zasady zachowania masy. Opcjonalnie, z zasady zachowania objętości, która działa dla cieczy nieściśliwych, a woda w dobrym przybliżeniu taka właśnie jest. Zasada owa mówi, że w każdej sekundzie objętość cieczy doprowadzanej do węża jest równa objętości cieczy z niego wypływającej. Zależność tę możemy zapisać jako



$$\frac{V}{t} = A_1 v_1 = A_2 v_2 = const., \tag{1}$$

gdzie V/t to strumień objętości, czyli objętość wody V przepływająca w czasie t przez wąż ogrodowy. A_1 i A_2 to natomiast pola przekroju węża na wlocie i wylocie, a v_1 i v_2 oznaczają wartości prędkości wody w środku węża i tuż za jego wylotem (patrz rysunek). Wydawałoby się, że równanie (1) wszystko wyjaśnia. Częściowe zatkanie wylotu powoduje zmniejszenie wartości A_2, co pociąga za sobą zwiększenie prędkości $v_2 w$ wylatującej wody. Brzmi pięknie, ale niestety niczego nie tłumaczy. Woda w wężu nie płynie bowiem zawsze z taką samą prędkością, a zaciśnięcie wypływu powoduje równoczesne zmniejszenie prędkości v_1. Oznacza to, że założenie o stałości objętości wody płynącej przez wąż w danym czasie nie ma racji bytu. Innymi słowy, równanie (1) mówi nam jedynie, że prędkość wody wylatującej z częściowo zatkanego końca będzie większa niż prędkość wody przepływającej przez wąż, ale nie pozwala nam obliczyć, ile ta prędkość będzie wynosić i jak będzie się zmieniać w zależności od pola przekroju wylotu. Szukajmy zatem dalej. Być może w rozwiązaniu naszej zagadki pomocnym okaże się równanie Bernoulliego, które jest wyrażeniem zasady zachowania energii dla nielepkich płynów przepływających bez wirów. Dla naszego przypadku możemy zapisać je w postaci

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \tag{2}$$

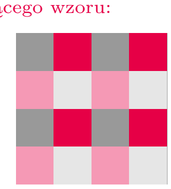
W powyższym równaniu ρ to gęstość wody wynosząca około 1000 kg/m3, natomiast p_1 i p_2 oznaczają odpowiednio ciśnienie wody wewnątrz węża i tuż za jego wylotem. Te dwa oznaczenia możemy „zwinąć” do nadciśnienia wody w rurociągu wyrażonego jako $p = p_1 - p_2$, które wynosi najczęściej kilka barów. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest ono stałe i równe 3 barom, czyli 0,3 MPa. Zauważmy, że jeżeli prędkość wody w wężu ogrodowym ma wartość 10 m/s (co odpowiada całkiem szybkiemu przepływowi), to składnik $\frac{1}{2}\rho v_1^2$ jest równy zaledwie 0,05 MPa, czyli wynosi sześciokrotnie mniej niż wartość nadciśnienia wody. Zazwyczaj prędkości przepływu wody w wężu ogrodowym są jednak niższe niż 10 m/s, co oznacza, że składnik ten możemy w większości przypadków zaniedbać w porównaniu z p. Otrzymujemy wtedy

$$v_2 = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}. \tag{3}$$

Jeżeli założymy, że woda leci do góry bez oporów, jak kamień w próżni (co nie jest prawdą, ale znakomicie upraszcza nam obliczenia), otrzymamy maksymalną wysokość, na którą wzniesie się strumień wody z węża ogrodowego:

$$h_{\max} = \frac{p}{\rho g}. \tag{4}$$

Rozwiązanie zadania M 1702. Pokolorujmy każde pole kartki według następującego wzoru:



Wówczas łatwo zauważyć, że pola jednokolorowe są rozłączne. Użyliśmy czterech kolorów, a zaznaczyliśmy $4n$ pól, więc z zasady szufladkowej Dirichleta możemy wskazać n zaznaczonych pól w tym samym kolorze, co kończy rozwiązanie.

Po prostych obliczeniach dostaniemy wartość $h_{\max} = 30$ m. Kto kiedykolwiek miał do czynienia z wężem ogrodowym, ten wie, że wyznaczona w ten sposób wysokość jest znacznie zawyżona. Co więcej, z równania (4) wynika, że niezależnie od tego, jak mocno ściśniemy lub zatkamy wylot węża, woda będzie zawsze wylatywać z niego na tę samą wysokość, określoną jedynie nadciśnieniem wody w sieci wodociągowej. No cóż, to także nie jest zgodne z obserwacjami. Wygląda więc na to, że równanie Bernoulliego nie odpowiada na pytanie zadane na początku niniejszego artykułu i niepoprawnie przewiduje zachowanie wody wypływającej z węża. Po chwili zastanowienia dojdziemy do wniosku, że to w zasadzie nic dziwnego. W powyższych rozważaniach nie uwzględniliśmy bowiem ważnej własności każdej (prawie) cieczy, jaką jest lepkość. Jest ona skutkiem wewnętrznego tarcia pomiędzy cząsteczkami i powoduje, że przepływająca w ogrodowym wężu woda przekształca część swojej energii na ciepło, zupełnie tak samo jak podczas klasycznego tarcia przesuwających się względem siebie ciał stałych. W przypadku cieczy ta strata energii zależy zarówno od długości przewodu, jak i od prędkości przepływu. Im większa prędkość, tym więcej energii mechanicznej przekształca się w ciepło. Zastanówmy się, jaki jest wpływ lepkości na prędkość wypływającej wody. Gdy wąż jest całkowicie zatkany palcem, woda w nim nie płynie, a zatem zjawiska związane z lepkością nie grają żadnej roli. Jeżeli lekko odchylimy palec, tworząc bardzo mały otwór, woda zacznie wypływać, ale jej wypływ będzie na tyle niewielki, że woda wewnątrz węża będzie płynąć niemrawo, z prędkością bliską zero. To również jest przypadek, kiedy straty energii mechanicznej związane z lepkością możemy pominąć. Wnikliwy Czytelnik zauważy, że taki przypadek rozważaliśmy już przy okazji dyskusji równania Bernoulliego. Istotnie, równanie to całkiem dobrze opisuje wypływ wody z węża przy bardzo małym otworze końcowym i braku strat energii mechanicznej przy wylocie. Możemy zatem uznać, że wysokość, na którą wzniesie się strumień przy najmniejszym możliwym odchyleniu palca, dążyć będzie do wartości danej równaniem (4). Czytelnik Doświadczony w Podlewaniu Ogrodów zapewne zaprotestuje, mówiąc że nawet przy mocnym ściśnięciu węża wartość 30 metrów nie jest osiągalna. Owszem, równanie (4) nie uwzględnia bowiem strat energii przy samym wypływie ani też oporu powietrza. Całkiem nieźle jednak oddaje sytuację, gdy lepkość wody nie powoduje znaczących strat energii mechanicznej. Gdy palec będziemy odchylać jeszcze bardziej, wypływ wody wzrośnie, równocześnie powodując zwiększenie prędkości przepływu wody przez wąż. Zjawiska związane z lepkością zaczną odgrywać coraz większą rolę, sprawiając, że energia mechaniczna przepływającej przez wąż wody zamieniać się będzie częściowo w ciepło. To z kolei spowoduje spadek pędu wody na wylocie, co objawiać się będzie jako mniejszy zasięg strumienia. Innymi słowy, poprzez zaciśnięcie końcówki węża lub zakrycie jej palcem zmniejszamy straty energii spowodowane tarciem wewnętrznym wody w wężu, przez co energia kinetyczna cząsteczek na wylocie może osiągnąć większą wartość. Oto prawdziwa przyczyna zwiększenia zasięgu strumienia przy częściowym zakryciu palcem wylotu węża ogrodowego! Czy możemy oszacować straty energii związane z lepkością? Owszem, możemy, choć nie jest to rzecz łatwa, gdyż wszelkie rozproszenia energii mechanicznej w cieczach zazwyczaj wymykają się prostym opisom analitycznym. Spróbujmy podejść do tego zagadnienia, zaczynając od znanego nam już równania Bernoulliego. Zmodyfikujmy więc zależność (2), dzieląc ją stronami przez $g\rho$ oraz dodając składnik h_L związany z energią mechaniczną rozproszoną poprzez tarcie wewnętrzne cieczy:

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + h_L. \tag{5}$$

Na wartość współczynnika h_L mają wpływ dwa czynniki, co możemy zapisać jako $h_L = h_f + h_c$. Pierwszy z nich, h_f, związany jest z rozpraszaniem energii mechanicznej podczas przepływu wody przez wąż ogrodowy. Drugi, h_c, opisuje tarcie cząsteczek spowodowane zawirowaniami cieczy na końcu węża, czyli w miejscu, gdzie przyłożyliśmy palec. Czynnik związany z tarciem podczas przepływu opisać możemy empirycznym równaniem Darcy'ego–Weisbacha:

$$h_f = f\frac{v_1^2}{2g}\frac{L}{D.} \tag{6}$$

Jak widzimy, powyższe równanie uwzględnia wpływ rozmiarów węża ogrodowego (patrz rysunek). Im jego długość L jest większa oraz im mniejszą ma szerokość D, tym straty związane z lepkością rosną. Dodatkowo zależą one od kwadratu prędkości przepływu v_1 oraz od współczynnika oporu f, którego wartość może być odczytana ze specjalnych tablic Moody'ego, sporządzonych dla wody płynącej z różną prędkością przez rury o zróżnicowanej szorstkości i średnicy. Na przykład dla węża o gładkich ściankach i średnicy 1 cm, przez który płynie woda z prędkością 1 m/s, wartość współczynnika f wynosi około 0,03. Drugim czynnikiem powodującym rozproszenia energii mechanicznej cieczy są straty przy wylocie, które możemy wyrazić poprzez:

$$h_c = K_L\frac{v_2^2}{2g}. \tag{7}$$

Tym razem kluczowymi parametrami okazują się prędkość wypływu wody v_2 oraz współczynnik oporu K_L. Niestety, wartość tego ostatniego może być dokładnie wyznaczona jedynie w eksperymentach prowadzonych dla konkretnej ręki dzierżącej konkretny wąż. Aby otrzymać wysokość, na którą wzniesie się woda, należy połączyć równania (5), (6) i (7) oraz wykonać kilka przekształceń. Czytelnika zainteresowanego pełnym wyprowadzeniem odsyłamy do artykułu [*], który dostarcza końcowego wzoru na wysokość osiąganą przez wodę wypływającą z węża ogrodowego częściowo zatkanego palcem:

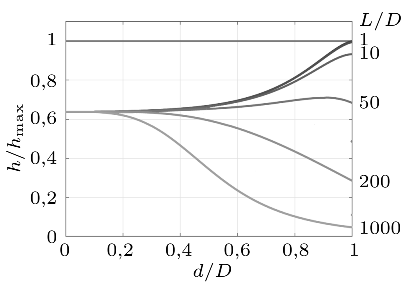
$$h \approx \frac{p}{\rho g(1 + K_L + f\frac{d^4 L}{D^5}).} \tag{8}$$

Zauważmy, że powyższa zależność jest tylko przybliżeniem. Nie powinno to dziwić, bo nasze rozważania są zaledwie szacunkowe. Zastosowaliśmy wszak bardzo prosty model opisujący straty energii wody na wylocie węża. Dodatkowo lepka ciecz traci energię na wszystkich zagięciach, nieregularnościach, zwężeniach itp., których nie wzięliśmy pod uwagę. Wszystkie te czynniki są bardzo trudne do uwzględnienia, nawet numerycznie. Pozostaje więc zadowolić się prostą, szacunkową zależnością. Zwróćmy również uwagę, że uwzględnienie rozproszeń energii związanych z lepkością daje niższe wysokości niż te przewidywane przez wzór (4), co jest zgodne z intuicją. Co więcej, zależne są one od d, czyli średnicy wylotu, czego spodziewamy się na podstawie naszych doświadczeń. Wzór (4) możemy zresztą wykorzystać, aby równanie (8) napisać w zgrabniejszej formie. Wprowadźmy zatem symbol $h_{\max}$ oznaczający maksymalną wysokość, na którą wzniosłaby się woda, gdyby była cieczą pozbawioną lepkości oraz nie czuła oporów powietrza:

$$h \approx \frac{h_{\max}}{1 + K_L + f\frac{d^4 L}{D^5}}. \tag{9}$$

Teraz pozostaje nam zastanowić się, co z powyższego wyrażenia wynika. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy długość węża wynoszącą 10 metrów, a nadciśnienie w sieci wodociągowej ustalmy na wartości 3 barów. Żeby cokolwiek obliczyć, musimy także znać wartości współczynników K_L oraz f. Całkiem niezłym oszacowaniem tego pierwszego okazuje się prosta zależność

$$K_L = 1 - (d/D)^2,$$



natomiast wartości f dostępne są w tablicach. Wykres pokazuje obliczenia wysokości, na którą wzniesie się woda dla kilku wartości stosunku L/D, począwszy od 1, a skończywszy na 1000. Pierwszy przypadek oznacza, że mamy do czynienia z bardzo szeroką rurą o średnicy 10 metrów, podczas gdy ostatnia wartość dotyczy cienkiego węża ogrodowego o średnicy zaledwie 1 cm. Każda zależność wykreślona jest w funkcji d/D, co oznacza, że wartość 1 odpowiada w pełni otwartemu wylotowi, a wartości bliskie 0 odnoszą się do wylotu niemalże całkowicie zatkanego. Widzimy, że w przypadku cienkich rur (wysokie wartości L/D) każde zatkanie odpływu wody wiąże się ze zwiększeniem wysokości, na którą wzniesie się ciecz. Ale co ciekawe, dla grubych rur (małe wartości L/D) częściowe zatkanie odpływu da przeciwny rezultat – im mocniejsze przesłonięcie wylotu, tym mniejsza wysokość strumienia wody. Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład w przypadku hydrantów ulicznych, które są grubymi, ale zazwyczaj krótkimi rurami. Kto kiedykolwiek widział otwarty hydrant, ten wie, że woda z niego ma naprawdę spory zasięg. Wystarczy jednak lekko zakręcić zawór, aby zasięg ten znacząco spadł, co znakomicie przewiduje wyprowadzona zależność. Zachowanie takie związane jest ze zwiększeniem strat energii mechanicznej cieczy na zaworze.

Z jeszcze ciekawszym przypadkiem mamy do czynienia dla rur średnio grubych i średnio długich ($L/D = 50$), gdzie występuje maksimum wysokości wypływającej wody dla $0 < d/D < 1$. Oznacza to, że aby uzyskać maksymalny zasięg strumienia, należy jedynie w niewielkim stopniu przesłonić odpływ. Dalsze zatykanie wylotu będzie skutkować spadkiem prędkości wypływającej wody. Powyższe rozważania mogą zostać wsparte eksperymentami, do których mocno zachęcamy wszystkich Czytelników. Pomiar wysokości osiąganej przez wodę wypływającą z węża ogrodowego wydaje się prostym doświadczeniem, które znakomicie urozmaici wszelkie prace ogrodowe. Ambitniejsi Czytelnicy mogą również sprawdzić, jak wysokość ta zależy od długości węża oraz od stopnia przesłonięcia jego wylotu palcem. A jeszcze ambitniejsi porównać zmierzone wartości z przewidywaniami teoretycznymi.

[∗] M.-R. Alam, „Why does water shoot higher if we partially block the garden hose outlet?", Am. J. Phys. 89 (2021) 567–574.