Na harfie Saturna promienie drgają
Rzucając nuty jaskrawe.
Budują boską oktawę,
Niebiańską harmonią tak zgodnie grają.
Oto przed nami wulkanem strzeliła
Para z głębin księżyca;
Wielkością swoją zachwyca,
Czarną toń nieba i Saturna okryła,
W baldachim się rozłożyła.
Miliardy kuleczek lodu,
Miliardy płatków śniegu
Spadają i przestrzeń bielą,
Przed nami dywanik ścielą.
A poprzez tę przestrzeń muzyka płynie
– Z harfy Saturna – ciche symfonie.
Opadła kotara, niebo jest czarne
W nim przestrzeń, której nikt nie ogarnie.
Wracamy do naszej błękitnej planety.

Obserwacje wykazały, że powierzchnia księżyca zmienia swoje położenie i dryfuje powoli po wodnym oceanie. Lądownik Huygens pozostał na Tytanie. Lecz my wyobrażamy sobie start lądownika z nami i przelot przez atmosferę. Najpierw wokół lądownika mamy pomarańczową otoczkę, która jaśnieje i przechodzi w prawie białą mgłę. Później otacza nas mgła fioletowa i wreszcie jesteśmy ponad atmosferą. Oddalając się od Tytana, mijamy inny księżyc – Enceladus, o średnicy około 500 km. Ciężar człowieka tutaj byłby równy ciężarowi tabliczki czekolady na Ziemi. Księżyc ten jest biały niczym duża śniegowa kula. Na gładkiej powierzchni jest mało kraterów. We wnętrzu księżyca pływy ogrzewają wodę i wzrasta tam ciśnienie. Co pewien czas spod powierzchni wystrzeliwuje w górę fontanna wody, jej krople szybko zamarzają. Zanim odlecimy na Ziemię, obejrzyjmy to piękne widowisko na tle z pierścieniami Saturna.

Wracamy do naszej błękitnej planety.

Mapa skarbów

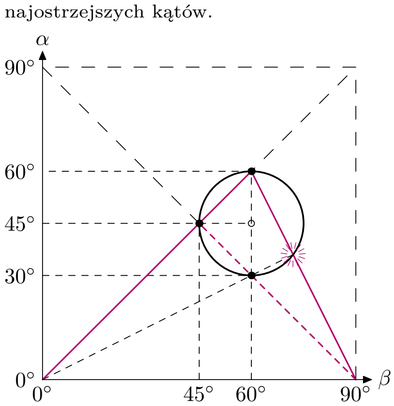
*Piotr PIKUL**

* Doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

W moim poprzednim artykule (*Jak wyznaczyć najbardziej dowolny trójkąt?*, Δ^{06}_{21}) wspomniałem o *mapie zbioru wszystkich trójkątów*. Właściwie to o dwóch różnych jej wersjach, ale dziś chciałbym powrócić do „tej drugiej”, na której punktowi (β, α) odpowiada trójkąt o miarach kątów $\alpha \leqslant \beta \leqslant 180° - \alpha - \beta$. Fakt, że interesują nas tylko dodatnie miary kątów, pozwala (poprzez przeanalizowanie wszystkich wymaganych nierówności liniowych) ustalić, że mapa ta ma kształt trójkąta o wierzchołkach $(0°, 0°)$, $(90°, 0°)$ oraz $(60°, 60°)$.

Jak się okazuje, dzięki takiej mapie można znaleźć nieoczekiwany „skarb”!

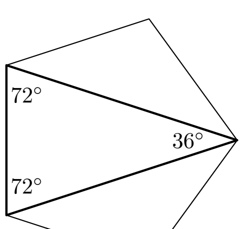
W tekście podaję współrzędne trójkątów na mapie, czyli miary dwóch najostrzejszych kątów.



Nanieśmy na nią trzy „najsłynniejsze” trójkąty, znane z kart szkolnych podręczników. Chodzi oczywiście o trójkąt równoboczny $(60°, 60°)$, prostokątny równoramienny $(45°, 45°)$ oraz trójkąt „30–60–90” $(60°, 30°)$. Na razie nic ciekawego się nie wydarzyło, ale łatwo zauważyć, że środkiem okręgu przechodzącego przez wspomniane punkty-trójkąty jest punkt $(60°, 45°)$, który reprezentuje jeden z *najbardziej dowolnych trójkątów*!

To jednak nie koniec. Gdy patrzymy na wspomniany okrąg, w oczy rzuca się punkt jego przecięcia z prawą krawędzią mapy. Oznacza on pewien trójkąt równoramienny, który postaramy się zidentyfikować.

Łatwo zauważyć, że punkt $(60°, 30°)$ stanowi ortocentrum mapy. Wobec tego, spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka $(0°, 0°)$ leży na okręgu o średnicy $(60°, 60°)$–$(60°, 30°)$. Wysokość ta ma oczywiście równanie $\beta = 2\alpha$, co oznacza, że kąt przy podstawie poszukiwanego trójkąta równoramiennego jest dokładnie dwukrotnie większy od kąta w wierzchołku. Ten prosty wymóg już jednoznacznie określa wszystkie miary kątów: $72°, 36°, 72°$. Są one w świecie matematycznym dobrze znane, a legitymujący się nimi wielokąt nazywamy *złotym trójkątem.*



Złoty trójkąt w pięciokącie foremnym

Już samo *złoto* w nazwie mogłoby wystarczyć do odtrąbienia znalezienia skarbu, ale pozwolę sobie jeszcze na dodatkowe dwa zdania podkreślające doniosłość znaleziska. Ostatecznie *nie wszystko złoto, co się świeci.* Nawet jeśli Czytelnik dotąd ze wspomnianym trójkątem się nie zetknął, to sądzę, że *złota liczba* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$, będąca stosunkiem długości boków złotego trójkąta (zachęcam do zmierzenia się z wyznaczeniem tego stosunku – nie jest to wcale takie trudne), jest już lepiej znana. Niemniej niekończące się opowieści o złotych podziałach, antycznych kanonach piękna, złotych prostokątach, liczbach Fibonacciego, mnożących się królikach, pszczelich drzewach genealogicznych czy nawet *zwykłym* pięciokącie foremnym pozwolę sobie tutaj pominąć. Niejednokrotnie na łamach *Delty* podobne tematy bywały poruszane. Teraz do bogatej kolekcji ciekawostek związanych ze złotą liczbą dochodzi fakt, że ostrokątny trójkąt równoramienny o tak zadanym stosunku ramion do podstawy leży (oczywiście nie sam trójkąt, ale reprezentujący go punkt) na jednym okręgu z trzema innymi sławnymi punktami świata trójkątów.

Czytelnik Zaznajomiony z „tą pierwszą” mapą zbioru trójkątów zechce na niej powtórzyć opisane tu poszukiwania. Dają inny rezultat, ale jaki?

Niby taka prosta mapa, a wskazuje drogę do całkiem ciekawego „skarbu”.