Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2022

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 837, 838

Redaguje Marcin E. KUCZMA

837. Wewnątrz wypukłego n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$ leży taki punkt P, że każdy z trójkątów PA_iA_j jest równoramienny ($1 \leqslant i < j \leqslant n$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P?

838. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb całkowitych x, y, z większych od 1, spełniających równanie

$$x^4 + y^4 = z^2 + 1.$$

Zadanie 838 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2022

Przypominamy treść zadań:

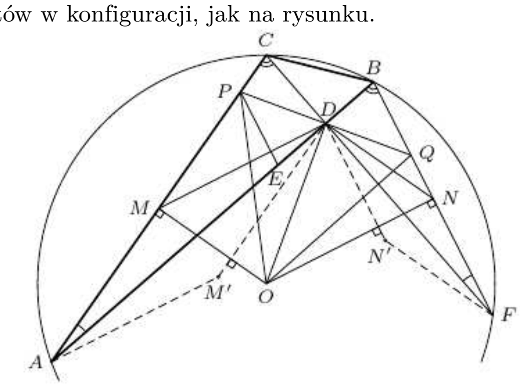
829. Trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A < \sphericalangle B < 90^\circ < \sphericalangle C$, jest wpisany w okrąg o środku O; odcinek CD jest wysokością. Punkt E jest symetryczny do B względem D; punkt M jest środkiem boku AC. Okrąg przechodzący przez O, D, M przecina prostą AC w punktach M i P. Udowodnić, że trójkąty DCP i DEP mają równe promienie okręgów opisanych.

830. Znaleźć wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych x, y, z, spełniające równanie

$$\operatorname{arc\,ctg} x + \operatorname{arc\,ctg} y + \operatorname{arc\,ctg} z = \frac{\pi}{4}.$$

829. Należy udowodnić, że $\sphericalangle DCP = \sphericalangle DEP$; teza zadania jest równoważnym (trochę wymyślnym) przeformułowaniem tej równości.

Niech prosta CD przecina okrąg ABC ponownie w punkcie F; niech N będzie środkiem odcinka BF, a Q – punktem przecięcia BF z prostą PD. Podane założenia o kątach trójkąta ABC uzasadniają układ rozważanych punktów w konfiguracji, jak na rysunku.



Równoramienne trójkąty DMA i DNF są podobne, bo ich kąty ostre MAD i NFD są kątami wpisanymi w okrąg ABC, opartymi na łuku BC. Uzupełniamy te trójkąty do rombów $AMDM'$ i $FNDN'$; widzimy cztery trójkąty podobne; połączymy je w pary: $\triangle DMA \sim \triangle DN'F$, $\triangle DNF \sim \triangle DM'A$. W obu tych parach podstawy AD i FD są prostopadłe; stąd (i z usytuowania punktów M, N', N, M' względem prostych AD, FD) wynika, że $DM \perp DN'$, $DN \perp DM'$.

Jednocześnie $ON \perp DN'$ (bo $ON \perp FN$, a $FNDN'$ jest rombem), i podobnie $OM \perp DM'$. W połączeniu z wcześniejszymi relacjami prostopadłości znaczy to, że $DM \| ON$, $DN \| OM$; czworokąt $DMON$ jest równoległobokiem.

Okrąg przechodzący przez punkty O, D, M, P (o którym mowa w treści zadania) ma średnicę OP, bo kąt OMP jest prosty. W takim razie również kąt ODP jest prosty. Tak więc czworokąt $DONQ$ ma kąty proste przy wierzchołkach D, N, czyli ma okrąg opisany o średnicy OQ. Te dwa okręgi są opisane (odpowiednio) na trójkątach DMO i OND, które są przystające, skoro $DMON$ to równoległobok. Mają zatem równe średnice: $OP = OQ$. [Czytelnicy znający *twierdzenie o motylku* (the *Butterfly Theorem*) widzą zapewne, że ostatnia równość także z niego wynika.]

W równoramiennym trójkącie POQ odcinek OD jest wysokością, więc i środkową: $DP = DQ$. Ponadto $DE = DB$ (z założenia) oraz $\sphericalangle EDP = \sphericalangle BDQ$ (kąty wierzchołkowe), i w konsekwencji trójkąty EDP i BDQ są przystające. Stąd $\sphericalangle DEP = \sphericalangle DBQ$. Pozostaje zauważyć, że kąty DBQ i DCP to kąty wpisane oparte na łuku AF. Dostajemy równość $\sphericalangle DCP = \sphericalangle DEP$, którą chcieliśmy udowodnić.

830. Przyjmijmy, że liczby x, y, z spełniają podane warunki oraz (bez straty ogólności) $x \geqslant y \geqslant z$. Liczby $\alpha = \operatorname{arc\,ctg} x$, $\beta = \operatorname{arc\,ctg} y$, $\gamma = \operatorname{arc\,ctg} z$ są dodatnie, ich suma wynosi $\pi/4$, więc $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma < \pi/4$; stąd $z = \operatorname{ctg}\gamma > 1$. Ponadto $\gamma \geqslant (\alpha+\beta+\gamma)/3$, zatem $z \leqslant \operatorname{ctg}(\pi/12) = 2 + \sqrt{3} < 4$. Tak więc $z = 2$ lub $z = 3$.

Równanie $\alpha + \beta + \gamma = \pi/4$ przekształcamy równoważnie do postaci:

$$\operatorname{ctg}\bigl(\alpha+\beta\bigr) = \operatorname{ctg}\bigl(\tfrac{\pi}{4} - \gamma\bigr);$$

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha\,\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\,\operatorname{ctg}\gamma - 1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\gamma};$$

$$\frac{xy-1}{x+y} = \frac{z+1}{z-1}.$$

Gdy $z = 2$, dostajemy równanie $xy - 1 = 3(x+y)$, czyli $(x-3)(y-3) = 10$, z rozwiązaniami $x = 13, y = 4$ oraz $x = 8, y = 5$. Gdy $z = 3$, mamy równanie $xy - 1 = 2(x+y)$, czyli $(x-2)(y-2) = 5$, z rozwiązaniem $x = 7, y = 3$ (wszystko przy założeniu $x \geqslant y \geqslant z$). Rozumowanie się odwraca, więc znalezione trójki (x, y, z) spełniają równanie wyjściowe.

Odpowiedź: $(x, y, z) = (13, 4, 2)$, $(8, 5, 2)$, $(7, 3, 3)$ oraz permutacje tych trójek.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 722 ($WT = 1{,}63$) i 723 ($WT = 3{,}77$) z numeru 9/2021

Konrad Kapcia	Poznań	1 – 42,51
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Sławomir Buć	Mystków	36,88
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Jacek Konieczny	Poznań	31,90
Ryszard Woźniak	Kraków	31,46
Ryszard Baniewicz	Włocławek	30,74
Tomasz Wietecha	Tarnów	15 – 28,11
Aleksander Surma	Myszków	4 – 27,75
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2 – 25,85

Klub 44 F

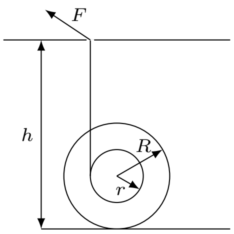
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2022

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 734, 735

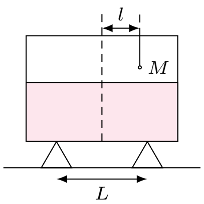
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

734. Na poziomym stole leży szpulka, na którą nawinięta jest cienka, nieważka, gładka nić. Promień zewnętrzny szpulki wynosi R, wewnętrzny r. Koniec nici przeciągnięty jest przez niewielki otwór znajdujący się na wysokości h nad powierzchnią stołu. W chwili początkowej szpulka jest nieruchoma, a nić pionowa (rys. 1). Koniec nici zaczynamy ciągnąć stałą siłą F i szpulka toczy się po stole bez poślizgu. Znaleźć maksymalną prędkość szpulki. Masa szpulki wynosi M. Należy przyjąć, że połowa tej masy skupiona jest na osi szpulki, a druga połowa rozłożona równomiernie na obwodzie zewnętrznym o promieniu R.



Rys. 1

735. Prostopadłościenne naczynie z wodą stoi na dwóch podporach symetrycznych względem osi naczynia i odległych od siebie o L. Nad wodą, na poprzeczce łączącej krawędzie naczynia, wisi na nici kawałek ołowiu o masie M, w odległości l od osi naczynia (rys. 2). Siły reakcji podpór wynoszą R_1 i R_2, odpowiednio dla lewej i prawej podpory. Jakie będą te siły reakcji, gdy nić wydłużymy i ołów zanurzy się w wodzie? Gęstość ołowiu jest n razy większa od gęstości wody.



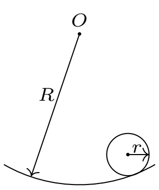
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 11/2022

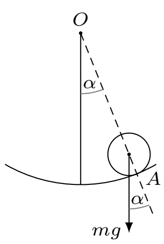
Przypominamy treść zadań:

726. Cienka obręcz o promieniu r toczy się bez poślizgu po wewnętrznej powierzchni walca o promieniu R i wykonuje małe drgania wokół położenia równowagi (rys. 3). Znaleźć okres tych drgań.

727. W zwojnicy o liczbie zwojów N, długości L i promieniu $R \ll L$ płynie prąd o natężeniu I. Jaka jest wytrzymałość drutu, z którego zrobiono zwojnicę, skoro nie ulega ona rozerwaniu?



Rys. 3



Rys. 4

726. Ponieważ nie ma poślizgu przy toczeniu, możemy ruch obręczy potraktować jako czysty obrót wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez jej punkt styczności A z powierzchnią walca (rys. 4). Równanie tego ruchu obrotowego ma postać

$$I_A\varepsilon = -mgr\sin\alpha, \tag{1}$$

gdzie ε jest przyspieszeniem kątowym, m masą obręczy, kąt α opisuje odchylenie środka obręczy od pionu. $I_A = 2mr^2$ jest momentem bezwładności obręczy względem osi przechodzącej przez punkt A. Ponieważ drgania są małe, możemy przybliżyć $\sin\alpha$ przez α, i równanie (1) przybiera postać

$$2mr^2\varepsilon + mgr\alpha = 0. \tag{2}$$

Środek obręczy porusza się po okręgu o promieniu $R - r$, stąd wartość jego przyspieszenia $a = (R-r)d^2\alpha/dt^2$. Z drugiej strony $a = \varepsilon r$, bo nie ma poślizgu. Z porównania:

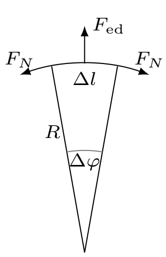
$$\varepsilon = \frac{(R-r)}{r}\frac{d^2\alpha}{dt^2}. \tag{3}$$

Podstawiając (3) do (2), otrzymujemy

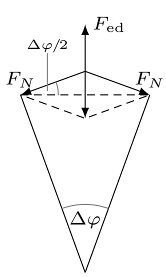
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{2\,(R-r)}\alpha = 0.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego częstość drgań $\omega = \sqrt{g/(2(R-r))}$. Szukany okres drgań

$$T = 2\pi\sqrt{2\,(R-r)/g}.$$



Rys. 5



Rys. 6

727. Ponieważ długość zwojnicy jest dużo większa od jej średnicy, możemy przyjąć, że pole magnetyczne wewnątrz zwojnicy jest jednorodne, równoległe do osi zwojnicy i wartość wektora indukcji wynosi $B = \mu_0 NI/L$, a pole na zewnątrz zwojnicy jest zaniedbywalne. Powstaje pytanie: Jaka jest wartość wektora indukcji pola magnetycznego, w którym znajduje się pojedynczy zwój? Pole zarówno po wewnętrznej, jak i zewnętrznej stronie zwoju jest superpozycją pola wytworzonego przez sam zwój – oznaczmy jego wartość przez B_1 – oraz pozostałych $N-1$ zwojów o wartości B_{N-1}. Wewnątrz zwojnicy $B_{N-1} + B_1 = B$, na zewnątrz $B_{N-1} - B_1 = 0$, stąd $B_{N-1} = \mu_0 NI/2L$.

Indukcja pola, w którym znajduje się pojedynczy zwój, jest połową indukcji pola w zwojnicy.

Na każdy niewielki element zwoju o długości $\Delta l = R\Delta\varphi$ (rys. 5), w którym płynie prąd o natężeniu I, działa siła elektrodynamiczna $\boldsymbol{F}_{ed} = I\boldsymbol{\Delta l} \times \boldsymbol{B}_{N-1}$ o wartości $F_{\mathrm{ed}} = BI\Delta l/2$, równoważona wypadkową sił F_N naprężenia drutu. Z rysunku 6 widać, że $F_{\mathrm{ed}}/2F_N = \Delta\varphi/2$. Z porównania z poprzednim wzorem: $F_N = \mu_0 NI^2R/2L$.

Wytrzymałość drutu, czyli maksymalna siła jego naprężenia, spełnia nierówność:

$$W > \mu_0 NI^2R/2L.$$