KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 39

Ekstremalnie!

Bartłomiej BZDĘGA

Zajmiemy się zadaniami z kombinatoryki, w których należy wyznaczyć największą liczbę x spełniającą zadane warunki. Chcemy, powiedzmy, dowieść, że poszukiwaną liczbą jest x_0. Rozwiązanie zadania musi składać się z dwóch części:

(1) uzasadnienie, że liczba x_0 spełnia zadane warunki;
(2) wykazanie, że liczby $x > x_0$ tych warunków nie spełniają.

Ale skąd wziąć x_0? Zazwyczaj jedna z powyższych części – ta konstruktywna – jest nieco łatwiejsza od drugiej, co daje możliwość odgadnięcia tej liczby. Na ogół jest to część (1), choć zdarzają się wyjątki. Próby przeprowadzenia dowodu drugiej z części dokonują weryfikacji.

Analogicznie rozwiązuje się zadania polegające na znalezieniu najmniejszej liczby spełniającej dane warunki – jedyna różnica polega na tym, że w punkcie (2) wykazujemy, że liczby $x < x_0$ tych warunków nie spełniają.

Aby zademonstrować metodę, rozwiążemy następujące zadanie.

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Ze zbioru $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ należy wybrać m liczb, ale tak, by żadna wybrana liczba nie dzieliła innej. Jaka jest największa liczba m, dla której jest to możliwe?

Rozwiązanie. Wykażemy, że największą taką liczbą jest $m = n$.

(1) W n-elementowym zbiorze $B = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\} \subset A$ żadna z liczb nie jest dzielnikiem innej, bo jeśli $a, b \in B$ i $a < b$, to $a < b < 2a$.
(2) Dla każdej liczby ze zbioru A rozważmy jej największy dzielnik nieparzysty. Może nim być jedna z liczb: $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Możliwości jest n, więc jeśli wybierzemy więcej niż n liczb ze zbioru A, to pewne dwie z nich – nazwijmy je a i b – będą miały ten sam największy nieparzysty dzielnik d. Pozostaje zauważyć, że wtedy $a = d \cdot 2^{t_1}$ i $b = d \cdot 2^{t_2}$ dla pewnych liczb całkowitych $t_1, t_2 \geqslant 0$, więc mniejsza z liczb a, b jest dzielnikiem większej.

Zadania

1. Niech A oznacza zbiór $4n^2$ punktów płaszczyzny, których obie współrzędne należą do zbioru $\{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$, oraz niech $O = (0, 0)$. Niektóre z tych punktów pokolorowano na czerwono, z zachowaniem następującego warunku: jeśli punkty P i Q są czerwone, to $|\sphericalangle POQ| \neq 90°$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów czerwonych.
2. Niech $m, n \geqslant 2$ będą liczbami naturalnymi. Jaką największą liczbę wież można ustawić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, żeby każda była atakowana przez co najwyżej dwie inne?
3. W układzie współrzędnych pomalowano na niebiesko wszystkie punkty o obu współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Chcemy narysować pewną liczbę prostych w taki sposób, by przez każdy niebieski punkt przechodziła przynajmniej jedna prosta, a ponadto żadna narysowana prosta nie może być równoległa do osi układu współrzędnych. Jaka jest, w zależności od $n \geqslant 2$, najmniejsza liczba potrzebnych prostych?
4. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ oraz $|A| = k$. Każdy podzbiór zbioru A ma sumę elementów różną od k. W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k, dla której jest to możliwe.
5. Ustalmy liczbę całkowitą dodatnią n. Permutacje $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$ nazwiemy *podobnymi*, jeśli $a_i = b_i$ dla przynajmniej jednego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k, dla której istnieje k różnych permutacji ciągu $(1, 2, \ldots, n)$, z których każde dwie są podobne.
6. W zależności od liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć największą liczbę k o następującej własności: dla każdego podziału kwadratu o boku $2n$ na prostokąty o wymiarach 2×1 istnieje prosta, która przecina co najmniej k prostokątów (prostokąt uznajemy za przecięty, jeśli prosta dzieli go na dwie części o dodatnim polu).

Wskazówki do zadań

1. Odpowiedź: $2n^2$.
   (1) Rozważyć te punkty ze zbioru A, które mają obie współrzędne dodatnie lub obie ujemne.
   (2) Podzielić zbiór A na czwórki $\{(x,y), (y,-x), (-x,-y), (-y,x)\}$. Jeśli jest więcej niż $2n^2$ czerwonych punktów, to pewne trzy z nich należą do tej samej czwórki.
2. Odpowiedź: $m + n$.
   (1) Ustawić $m + n - 1$ wież wzdłuż dwóch sąsiednich boków szachownicy i jedną w jedynym pozostałym wolnym narożniku.
   (2) Jeśli wieża jest atakowana przez najwyżej dwie inne, to sama „atakuje" co najmniej dwie jednostki brzegu szachownicy.
3. Odpowiedź: $2n - 2$.
   (1) Można to zrobić za pomocą prostych o współczynniku kierunkowym równym 1 lub -1.
   (2) Każda prosta przykrywa co najwyżej dwa punkty na „brzegu" kwadratu z niebieskich punktów.
4. Odpowiedź: $2n$.
   (1) $\{n, n+1, n+2, \ldots, 3n\} \setminus \{2n\}$.
   (2) Jeśli $k > 2n$, to istnieją takie różne $a, b \in A$, że $a + b = k$.
5. Odpowiedź: $(n-1)!$
   (1) Wszystkie permutacje $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ z $a_1 = 1$.
   (2) Żadne dwie z permutacji $(a_t, a_{t+1}, \ldots, a_n, a_1, a_2 \ldots, a_{t-1})$ dla $t = 1, 2, \ldots, n$ nie są podobne.
6. Odpowiedź: $3n - 1$.
   (1) Rozważyć dwie proste równoległe do przekątnej kwadratu, znajdujące się bardzo blisko niej, po jej różnych stronach.
   (2) Nie można przeciąć więcej prostokątów, jeśli wszystkie są zorientowane poziomo.