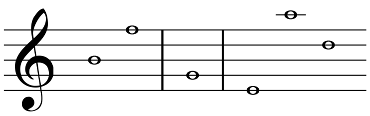
że w tym zapisie możemy pozbyć się nawiasów! Dostajemy ciąg $(3, 5, 2, 1, 6, 4)$, i on jest właśnie superzapisem!



Kluczowa obserwacja: nowe cykle w superzapisie zaczyna zawsze element mniejszy niż wszystkie poprzednie elementy. Powyższy rysunek ilustruje superzapis $(3, 5, 2, 1, 6, 4)$ (niestety, brak mu metrum).

Zastanówmy się, czemu możemy pozbyć się nawiasów. Popatrzmy na nasz ciąg. Pierwszy cykl zaczyna się od 3. Potem jest 5. Skoro 5 jest większe niż 3, to nie może zaczynać nowego cyklu, bo początek kolejnego cyklu musi być mniejszy niż początek obecnego. Potem widzimy 2 – skoro 3 było najmniejszym elementem w swoim cyklu, to znaczy, że 2 musi być w innym cyklu. Pierwszy cykl to zatem $[3, 5]$. Po 2 mamy 1, które nie może być w cyklu z 2. A więc drugi cykl to $[2]$. Od 1 zaczyna się ostatni cykl, którego nic już nie przerwie, bo nie znajdziemy nic mniejszego. Ostatni cykl to zatem $[1, 6, 4]$. Odczytaliśmy, jakie są cykle, a zatem wiemy, jaka to permutacja. Superzapis jest więc odwracalny – każdemu superzapisowi odpowiada dokładnie jedna permutacja. Super!

Formalnie, superzapis zdefiniować możemy jako bijekcję f na zbiorze wszystkich permutacji $\{1, \ldots, n\}$. Dla $n = 3$ mamy na przykład:
$f(1, 2, 3) = (3, 2, 1)$, $f(1, 3, 2) = (2, 3, 1)$,
$f(2, 1, 3) = (3, 1, 2)$, $f(2, 3, 1) = (1, 2, 3)$,
$f(3, 1, 2) = (1, 3, 2)$, $f(3, 2, 1) = (2, 1, 3)$.

Wróćmy jednak do naszego pytania: jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdym cyklu jest przynajmniej jedna ze skarbonek $1, 2, \ldots, k$? Popatrzmy na pierwszą liczbę w superzapisie. Jeżeli jest ona większa niż k, to znaczy, że istnieje cykl, w którym najmniejszy element jest większy niż k. W takiej sytuacji nie uda nam się otworzyć wszystkich skarbonek. Jeżeli z kolei pierwsza liczba jest mniejsza bądź równa k, to znaczy, że w każdym cyklu jest taka liczba (bo najmniejszy element w każdym cyklu jest $\leqslant k$). I wtedy nam się uda.

Czy Dociekliwy Czytelnik, korzystając z superzapisu, będzie potrafił obliczyć prawdopodobieństwo, że w losowej permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ liczba 1 jest w cyklu z 2, ale nie z 3? Albo że liczba 1 jest w cyklu długości k?

Pozostaje stwierdzić, ile jest permutacji, które w swoim superzapisie mają na pierwszej pozycji liczbę $1, 2, \ldots, k$? Dla każdej liczby – także większej niż k – jest ich tyle samo, czyli $1/n$ wszystkich. Wynika to z tego, że superzapis jest odwracalny, czyli jeden superzapis odpowiada jednej permutacji. Prawdopodobieństwo, że na pierwszej pozycji w superzapisie jest liczba mniejsza bądź równa k, jest więc równe dokładnie k/n. I to jest właśnie prawdopodobieństwo tego, że uda nam się otworzyć wszystkie skarbonki.

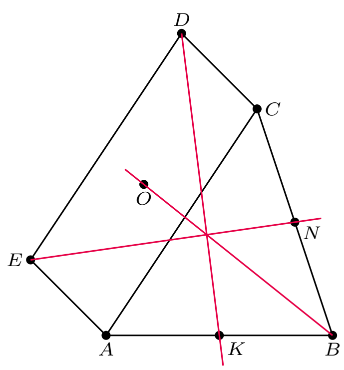
Okazało się, że klucz do rozwiązania nie chował się w skarbonkach, a był na pierwszej pozycji w superzapisie.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1699. Liczba naturalna większa niż 10^3 daje te same reszty przy dzieleniu przez 40 i przez 625. Jaka może być cyfra tysięcy tej liczby?
Rozwiązanie na str. 13

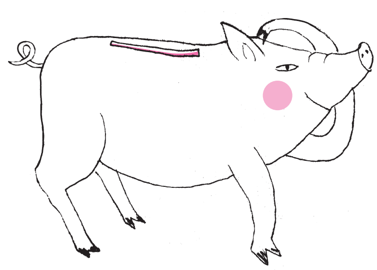
M 1700. Każde pole planszy 100×100 jest pomalowane na biało lub czarno, przy czym wszystkie pola przylegające do boków planszy są czarne. Ponadto na planszy nie ma jednokolorowego kwadratu 2×2. Udowodnij, że na planszy istnieje kwadrat 2×2 pomalowany „w szachownicę”, tzn. niezawierający sąsiadujących pól w tym samym kolorze.
Rozwiązanie na str. 5



M 1701. W trójkącie ABC budujemy równoległobok $ACDE$ na zewnątrz trójkąta. Punkt O jest środkiem równoległoboku, natomiast punkty K i N są środkami odcinków AB i BC. Udowodnij, że proste DK, EN i BO przecinają się w jednym punkcie.
Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1041. Dwie niewielkie, sferyczne elektrody o promieniu r każda umieszczono w jednorodnym, słabo przewodzącym ośrodku o oporze właściwym ρ. Odległość między elektrodami jest znacznie większa od r. Oszacuj wartość oporu elektrycznego R między nimi.
Rozwiązanie na str. 10



F 1042. Wartość pola elektrycznego mierzona przy powierzchni Ziemi wynosi $E_0 \approx 100$ V/m. Na wysokości 1,5 km nad Ziemią pole elektryczne wynosi $E_1 \approx 25$ V/m. Ile wynosi średnia gęstość d ładunku elektrycznego atmosfery w pobliżu Ziemi? Przenikalność elektryczna próżni $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m, a promień Ziemi $R \approx 6400$ km.
Rozwiązanie na str. 11