# Małżeństwa, zaręczyny i algorytmy stabilnego dopasowania,

## czyli nowy wspaniały świat, w którym nikt nikogo nie zdradza

*Piotr SKOWRON**

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W 1962 roku dwóch amerykańskich matematyków, David Gale i Lloyd Shapley, zadało sobie pytanie, czy możliwe jest dobranie mężczyzn i kobiet w pary tak, aby nawet najbardziej zatwardziali przeciwnicy monogamii nie byli w stanie nawiązać romansu [1]? W tym celu, rzecz jasna, odwołali się do teorii algorytmów i zaproponowali następujący model. Niech $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ i $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_\ell\}$ oznaczają, odpowiednio, zbiory $n$ mężczyzn i $\ell$ kobiet. Każdy mężczyzna ma ustalone preferencje względem kobiet; niech $\succ_m$ oznacza ranking preferencji mężczyzny $m$, będący porządkiem liniowym na zbiorze $K$. Podobnie, niech $\succ_k$ oznacza ranking preferencji kobiety $k$. W swoim artykule Gale i Shapley przyjęli konserwatywny punkt widzenia i nie wchodzili w kwestie związane z bi- czy też homoseksualizmem.†

†Warto jednak dodać, że niektóre z kolejnych prac dotyczących problematyki stabilnego dopasowania prezentowały bardziej progresywne spojrzenie na kwestię małżeństwa [2]. Przykładowo, często rozważany jest model, w którym ranking preferencji danego człowieka może być wyrażony jako porządek względem innych ludzi, niezależnie od płci. Model ten jest bardziej ogólny i algorytmy dla tego przypadku znajdują zastosowanie w szerszym zakresie sytuacji, na przykład przy doborze współlokatorów w akademikach *(the stable roommate problem)*. Późniejsze modele zakładały również, że rankingi preferencji mogą być reprezentowane jako słabe porządki lub że ludzie mogą kierować się kilkoma niezależnymi kryteriami przy doborze partnerów. W tym artykule nie rozważamy bardziej złożonych modeli, jednak warto wiedzieć, że dziedzina badań zapoczątkowana przez Gale'a i Shapleya jest szeroka i dotyczy wielu wariantów bazowego problemu.

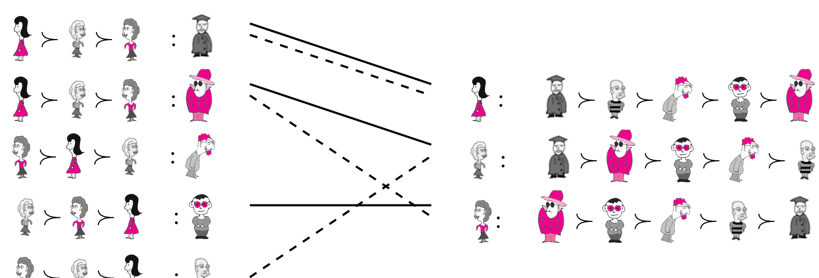
Dopasowaniem nazwiemy zbiór par, z których każda złożona jest z mężczyzny i kobiety, takich, że każdy człowiek jest sparowany z co najwyżej jedną osobą. Formalnie, zbiór $\Phi \subseteq \{\{m, k\} \colon m \in M, k \in K\}$ jest dopasowaniem, jeżeli dla dowolnych dwóch par $p_1, p_2 \in \Phi$ $(p_1 \neq p_2)$ zachodzi $p_1 \cap p_2 = \emptyset$. Dla każdej osoby $o$ przez $\Phi(o)$ oznaczamy partnera $o$ w dopasowaniu $\Phi$. Jeżeli w ramach $\Phi$ osoba $o$ nie jest z nikim sparowana, to stosujemy notację $\Phi(o) = \perp$. Zakładamy również, że każda osoba woli być sparowana, niż pozostać bez pary (jako ciekawe ćwiczenie Czytelnik może spróbować wykazać, że założenie możemy poczynić bez straty ogólności), czyli dla dowolnych $m \in M$ i $k \in K$ mamy $k \succ_m \perp$ i $m \succ_k \perp$. Jesteśmy gotowi do zdefiniowania kluczowego pojęcia rozważanego w tym artykule.

**Definicja 1.** *Dopasowanie $\Phi$ jest* stabilne, *jeżeli nie istnieją mężczyzna $m \in M$ i kobieta $k \in K$, którzy spełniają następujący warunek:*

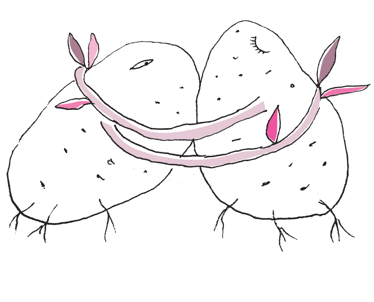
$$k \succ_m \Phi(m) \quad \text{oraz} \quad m \succ_k \Phi(k).$$

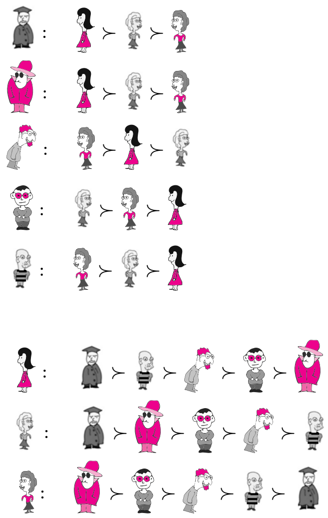
Innymi słowy, dopasowanie jest stabilne, jeżeli nie istnieją tacy mężczyzna i kobieta, którzy woleliby siebie nawzajem niż swoich dotychczasowych partnerów. Zilustrujmy definicję 1 na poniższym przykładzie:

**Przykład 1.** *Rozważmy instancję przedstawioną na poniższym rysunku.*

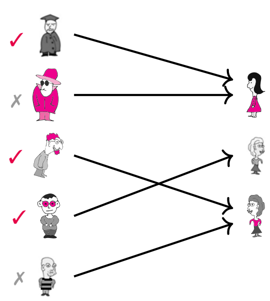


*Na rysunku obok każdej osoby umieściliśmy jej listę preferencji. Przykładowo, preferencje mężczyzny to $\succ$ $\succ$, dlatego najchętniej zacząłby chodzić z (jest przecież inteligentna, wrażliwa, czuła i ma świetne poczucie humoru!), w drugiej kolejności z (no tak, przecież uwielbia blondynki!), w ostateczności zgadzając się na chodzenie z (ale tylko dlatego, że pochodzi z bogatej rodziny, więc zapewne to ona będzie płacić za bilety do kina). Na rysunku zaznaczyliśmy również dwa dopasowania. Dopasowanie $\Phi_1 = \{\{\ ,\ \}, \{\ ,\ \}, \{\ ,\ \}\}$, oznaczone przerywaną linią, nie jest stabilne. Spójrzmy na parę i : woli od – swojej partnerki w $\Phi_1$; podobnie woli od swojego partnera . Ta para świadczy zatem o tym, że dopasowanie $\Phi_1$ nie jest stabilne. Taką parę nazwiemy* blokującą. *Pozostałe pary blokujące dla $\Phi_1$ to i oraz i . Dopasowanie $\Phi_2 = \{\{\ ,\ \}, \{\ ,\ \}, \{\ ,\ \}\}$, oznaczone ciągłą linią, jest stabilne – nie istnieje para, która blokowałaby $\Phi_2$.*

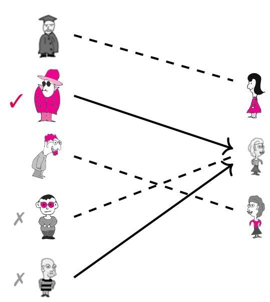




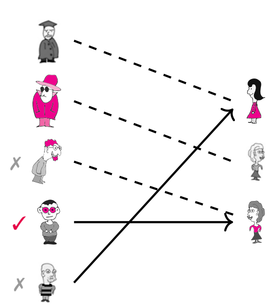
Preferencje



Krok 1



Krok 2



Krok 3

Pojęcie stabilnego dopasowania jest ważne i powszechnie wykorzystywane w praktyce. Algorytmy do znajdowania stabilnego dopasowania są między innymi używane w Stanach Zjednoczonych do przydziału rezydentów lekarskich do szpitali (wtedy rolę mężczyzn przyjmują rezydenci lekarscy, a rolę kobiet wakaty w szpitalach) lub do przydziału uczniów do szkół. Podobne algorytmy są również wykorzystywane przy transplantacji nerek, aby dopasować chorych potrzebujących nerki z potencjalnymi dawcami – zdarza się, że dana osoba $x$ nie jest w stanie przekazać swojej nerki bliskiej osobie $y$ ze względu na niezgodność grupy krwi, jednak $x$ może przekazać nerkę innemu pacjentowi $z$ w zamian za to, że osoba bliska $z$ zgodzi się przekazać nerkę dla $y$; w ten sposób możemy tworzyć dopasowania, które zwiększają liczbę możliwych transplantacji. Teoria stabilnych dopasowań jest obecnie ugruntowana, a jeden z jej twórców, wspomniany wcześniej Lloyd Shapley, za stworzenie fundamentów tej teorii otrzymał w 2012 roku Nagrodę Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii.

Rozumiemy już istotę i wagę pojęcia stabilnego dopasowania. Czas zadać kluczowe pytanie. Czy stabilne dopasowanie zawsze istnieje, niezależnie od preferencji mężczyzn i kobiet? Jeżeli tak, to czy potrafimy je efektywnie obliczyć? Otóż na oba te pytania możemy odpowiedzieć **TAK**! (Tak, autor również jest podekscytowany tym faktem!). Oto i algorytm znajdowania stabilnego dopasowania zaproponowany przez Gale'a i Shapleya. Początkowo zakładamy, że nikt nie jest zaręczony, i w pętli wykonujemy następujące kroki:

1. Każdy niezaręczony mężczyzna oświadcza się swojej ulubionej kobiecie spośród tych, które do tej pory nie odrzuciły jego oświadczyn.
2. Każda kobieta $k$, której oświadcza się jeden bądź kilku mężczyzn, wybiera swojego ulubionego spośród oświadczających się – nazwijmy go $x$ – a oświadczyny pozostałych definitywnie odrzuca. Jeżeli $k$ nie jest zaręczona, to przyjmuje oświadczyny $x$, i od tej pory $k$ i $x$ są zaręczeni. Jeżeli $k$ jest już zaręczona z mężczyzną $y$, to porównuje ona $x$ i $y$. Jeżeli $x \succ_k y$, to $k$ zrywa swoje zaręczyny z $y$ (oznacza to również, że $k$ definitywnie odrzuca jego oświadczyny) oraz zaręcza się z $x$. W przeciwnym przypadku, czyli gdy $y \succ_k x$, kobieta $k$ odrzuca oświadczyny $x$.

Algorytm się zatrzymuje, gdy każdy mężczyzna jest zaręczony bądź jego oświadczyny zostały odrzucone przez każdą kobietę, a następnie zwraca dopasowanie odpowiadające aktualnym zaręczynom. Zwróćmy uwagę, że algorytm na pewno kiedyś się zatrzyma, gdyż mężczyźni nie mogą dwukrotnie oświadczyć się tej samej kobiecie.

Zilustrujmy działanie algorytmu dla instancji z przykładu 1. Pierwsze trzy kroki algorytmu są również przedstawione na rysunkach obok: strzałka oznacza oświadczyny, przerywana linia to zaręczyny, które istnieją tuż przed danym krokiem algorytmu, zaś symbole ✗ i ✓ oznaczają odpowiednio odrzucenie/zerwanie oraz przyjęcie oświadczyn. Początkowo i oświadczają się , ponieważ jest to ich ulubiona kobieta. i oświadczają się , zaś oświadcza się . Następnie odrzuca oświadczyny i zaręcza się z . Podobnie odrzuca i zaręcza się z ; ponadto zaręcza się z . W drugim obrocie pętli algorytmu i oświadczają się . odrzuca i porównuje ze swoim dotychczasowym partnerem, czyli z . Okazuje się, że woli od , zatem zrywa zaręczyny z i zaręcza się z . W trzecim obrocie pętli oświadcza się , a oświadcza się . odrzuca oświadczyny (a co za tym idzie, został odrzucony przez każdą kobietę), zaś zrywa swoje zaręczyny z i zaręcza się z . W czwartym obrocie pętli oświadcza się , która go odrzuca, zaś w piątej i ostatniej iteracji oświadcza się i przez nią również zostaje odrzucony. W tym momencie jest zaręczony z , jest zaręczony z , zaś z . Dopasowanie odpowiadające tym zaręczynom (czyli $\Phi_2$) zostaje zwrócone przez algorytm Gale'a–Shapleya.

**Twierdzenie 1.** *Algorytm Gale'a–Shapleya zwraca stabilne dopasowanie.*

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że dopasowanie $\Phi$ zwrócone przez algorytm Gale'a–Shapleya nie jest stabilne. Niech $\{m, k\}$ będzie parą blokującą $\Phi$. Mamy zatem $m \succ_k \Phi(k)$ oraz $k \succ_m \Phi(m)$. Ponieważ $m$ woli $k$ od swojej partnerki $\Phi(m)$, $m$ musiał oświadczyć się $k$ i zostać przez nią odrzuconym (mężczyzna zawsze oświadcza się ulubionej kobiecie, która go do tej pory nie odrzuciła). Skoro $k$ odrzuciła $m$, to znaczy, że w chwili, gdy rozważała jego oświadczyny, otrzymała propozycję bądź była zaręczona z mężczyzną, którego wolała niż $m$. To oznacza, że w pewnym momencie $k$ była zaręczona z kimś, kogo wolała od $m$. Zauważmy, że w trakcie działania algorytmu Gale'a–Shapleya każda zaręczona kobieta zrywa zaręczyny tylko wtedy, gdy może się zaręczyć z kimś, kogo woli od obecnego partnera. Z tego wynika, że na koniec działania algorytmu $k$ musiała być również zaręczona z kimś, kogo woli od $m$. Jest to sprzeczne z $m \succ_k \Phi(k)$, zatem $\{m, k\}$ nie może być parą blokującą, co kończy dowód. □

Zauważmy, że gdybyśmy wykonali algorytm Gale'a–Shapleya z zamienionymi rolami i gdyby to kobiety oświadczały się mężczyznom, wynik działania algorytmu mógłby być inny, jednak zwrócone dopasowanie również byłoby stabilne. Co ciekawe, można pokazać, że oryginalna wersja algorytmu stawia mężczyzn w uprzywilejowanej sytuacji. Można nawet wykazać, że dopasowanie zwrócone przez algorytm Gale'a–Shapleya jest dla mężczyzn optymalne!

**Twierdzenie 2.** *Nie istnieje stabilne dopasowanie, w którym którykolwiek mężczyzna mógłby uzyskać lepszą partnerkę niż ta, którą przydzielił mu algorytm Gale'a–Shapleya.*

*Dowód.* Niech $\Phi$ oznacza dopasowanie zwrócone przez algorytm Gale'a–Shapleya. Załóżmy nie wprost, że istnieje stabilne dopasowanie $\Psi$, w którym dla pewnego mężczyzny $m_1$ zachodzi $\Psi(m_1) \succ_{m_1} \Phi(m_1)$. Oznaczmy $k_1 = \Phi(m_1)$ i $k_2 = \Psi(m_1)$. W algorytmie Gale'a-Shapleya $m_1$ oświadczył się $k_2$ przed $k_1$, zatem $k_2$ musiała odrzucić $m_1$ na rzecz innego mężczyzny $m_2$. Oznacza to, że $m_1$ oświadczył się $k_1$ po tym, jak $m_2$ oświadczył się $k_2$. Co więcej, $m_2 \succ_{k_2} m_1$. Ponieważ $\Psi$ jest stabilnym dopasowaniem, musi zachodzić $\Psi(m_2) \succ_{m_2} k_2$. Oznaczmy $k_3 = \Psi(m_2)$. Wiemy, że $m_2$ musiał się oświadczyć $k_3$ przed $k_2$, zatem $k_3$ odrzuciła $m_2$ na rzecz $m_3$. Analogicznie, $m_2$ oświadczył się $k_2$ po tym, jak $m_3$ oświadczył się $k_3$. Możemy kontynuować to rozumowanie, znajdując kolejne takie pary $m_i$, $k_i$, że $k_i$ jest partnerką $m_{i-1}$ w $\Psi$ (zakładając $i > 1$). Ponieważ mamy skończoną liczbę mężczyzn, w pewnym momencie musi nastąpić sytuacja, że znajdziemy cykl, czyli taką parę $m_p$ i $k_p$, że $k_p$ będzie partnerem pewnego wcześniej zdefiniowanego $m_j$ (dla $j < p$).

Otrzymujemy zatem sekwencje $m_j, m_{j+1}, \ldots, m_p$ oraz $k_j, k_{j+1}, \ldots, k_p$ takie, że $m_j$ oświadczył się $k_j$ po tym, jak $m_{j+1}$ oświadczył się $k_{j+1}$, ... , $m_p$ oświadczył się $k_p$ po tym, jak $m_j$ oświadczył się $k_j$. Pokazuje to sprzeczność i kończy dowód. □


**Literatura**

[1] D. Gale and L. S. Shapley. „College admissions and the stability of marriage". *The American Mathematical Monthly*, 120(5):386–391, 1962.

[2] K. Iwama and S. Miyazaki. „A survey of the stable marriage problem and its variants". In *International Conference on Informatics Education and Research for Knowledge-Circulating Society*, pages 131–136, 2008.


# Zegar biologiczny tyka


*Joanna M. OLAS*

Doktorantka, Instytut Fizyki PAN


W trakcie naszego życia przynajmniej kilkukrotnie spotykamy się z określeniem *zegar biologiczny*, lecz co ono dokładnie oznacza? Jak nasze ciało zdaje sobie sprawę z upływającego czasu? Czy zostawia on jakieś zmiany w naszych tkankach i organach? Jeśli tak, to czy jesteśmy w stanie je zmierzyć i na ile precyzyjnie możemy określić, ile czasu upłynęło?

Choć te pytania mogą brzmieć nieco frywolnie, są w istocie bardzo ważne w procesie identyfikacji anonimowych ciał. W całym zestawie informacji potrzebnych do zidentyfikowania ciała oszacowanie wieku jest zdecydowanie najbardziej istotne. Zadanie to jest na tyle ważne, że na przestrzeni lat opracowano wiele metod estymacji wieku – np. pomiar zasklepienia czaszki, obserwacja zmian w kościach miednicy czy nawet morfologia materiału pobranego z żeber. Niektóre z tych metod mogą mieć bardzo wysoką dokładność, jednak wymagają kosztownego sprzętu i często mogą być wykorzystywane tylko w przypadku szkieletów, a nie niedawno odnalezionych ciał. Najbardziej zaawansowane i obiektywne metody szacowania wieku we współczesnej nauce bazują na analizie DNA. Na podstawie próbek krwi możliwe jest określenie przybliżonego wieku z wysoką dokładnością.

Szukając innego rozwiązania, japońscy naukowcy z Kioto, prowadzeni przez Hiroshiego Ikegayę, rozważali możliwość wykorzystania spektroskopii Ramana do analizy ludzkiej skóry, dzięki czemu opracowano by nowe, wiarygodne i łatwo dostępne narzędzie do szacowania wieku. Ich pomysł polegał na analizie widm promieniowania lipidów i białek znajdujących się w skórze, które można pobrać podczas autopsji.

Analiza widma promieniowania uzyskana w spektroskopii ramanowskiej jest powszechnie używana w chemii, ponieważ dostarcza „odcisk palca" cząsteczek, na podstawie którego można je później identyfikować. Japońscy naukowcy wierzyli, że emisja