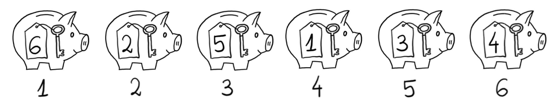
Klucze, skarbonki, młotek i superzapis

Oskar SKIBSKI

Mamy n skarbonek i n pasujących kluczy. Do każdej skarbonki wrzucamy jeden losowy klucz. Chcielibyśmy je teraz wszystkie otworzyć, ale nie mamy żadnego klucza. Mamy jednak młotek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rozbijając k losowych skarbonek, zdołamy otworzyć wszystkie skarbonki?

Zadanie to pochodzi z książki *Combinatorial problems & exercises* László Lovásza. Autor razem z Avim Wigdersonem otrzymał w 2021 roku nagrodę Abela, o czym pisaliśmy w poprzednim numerze, w artykule *Czy losowe bity pomagają?*

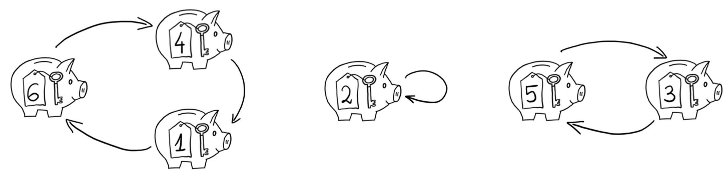
Bez straty ogólności przyjmiemy, że rozbijamy pierwsze k skarbonek – klucze rozrzucone są losowo, więc nie wpłynie to na prawdopodobieństwo. Zacznijmy od przykładu z sześcioma skarbonkami, z których rozbijemy trzy.



Zaczynamy od skarbonki 1. Bierzemy zamach i po chwili wyciągamy klucz do skarbonki 6. Otwieramy ją kluczem i z niej wyciągamy klucz do 4. W niej z kolei jest klucz do 1, który nam się nie przyda, bo skarbonkę 1 już roztrzaskaliśmy. Teraz rozbijamy skarbonkę 2, w której niestety znajdujemy nieprzydatny klucz do niej samej. W końcu rozbijamy skarbonkę 3, co pozwala nam otworzyć skarbonkę 5. Trochę kluczyliśmy, ale udało się – nie została nam żadna zamknięta skarbonka.

Widzimy, że najważniejszą kwestią są tworzące się cykle. Jeżeli od każdej skarbonki poprowadzimy strzałkę do skarbonki, do której jest w niej klucz, to powstanie nam taki graf:

Czy graf mógłby wyglądać inaczej niż zbiór cykli? Nie! Jeżeli zaczniemy podążać od dowolnej skarbonki za strzałkami, to musimy w końcu do niej znowu dojść. Jest tak dlatego, że w pewnym momencie skarbonki na naszej ścieżce zaczną się powtarzać i gdyby jako pierwsza powtórzyła się inna skarbonka niż nasza początkowa, to znaczyłoby to, że znaleźliśmy do niej dwa klucze w dwóch różnych skarbonkach.



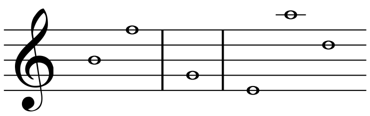
Mamy więc trzy cykle: $[1, 6, 4]$, $[2]$ oraz $[3, 5]$. Widzimy, że udało nam się otworzyć wszystkie skarbonki, bo w każdym cyklu była jakaś skarbonka, którą rozbijaliśmy – rozbijając ją, dobraliśmy się do wszystkich innych skarbonek w tym samym cyklu. Z kolei gdyby tak nie było, tzn. byłby cykl bez żadnej rozbijanej skarbonki, to by nam się nie udało. Zatem początkowe pytanie możemy sformułować tak: jakie jest prawdopodobieństwo, że przy losowym rozmieszczeniu n kluczy w n skarbonkach w każdym powstającym cyklu jest przynajmniej jedna ze skarbonek $1, 2, \ldots, k$?

Dla $n = 6$ i $k = 3$ wynik możemy obliczyć ręcznie, ale nawet taki prosty przypadek wymaga trochę pracy. Permutacji z co najmniej jednym złym cyklem jednoelementowym $[4]$, $[5]$ lub $[6]$ jest $3 \cdot 5! - 3 \cdot 4! + 3! = 294$ (użyliśmy tu zasady włączeń i wyłączeń). Permutacji ze złym cyklem dwuelementowym $[4, 5]$, $[4, 6]$ lub $[5, 6]$, ale bez $[4]$,$[5]$ i $[6]$ jest $3 \cdot (4! - 3!) = 54$. Permutacji ze złym cyklem trzyelementowym $[4, 5, 6]$ lub $[4, 6, 5]$ jest $2 \cdot 3! = 12$. Czyli spośród $6! = 720$ wszystkich permutacji dokładnie 360 jest złych. Wiemy więc, że uda nam się z prawdopodobieństwem 50% (ten sam wynik uzyskalibyśmy też argumentując, że albo nam się uda, albo nie uda).

Abyśmy mogli odpowiedzieć na to pytanie, z pomocą przybędzie nam… *superzapis* (czyt. „super zapis", nie „supeżapis")! Nazwa ta nie jest nazwą oficjalną, jednak Czytelnik zaraz się przekona, że jest ona bardzo adekwatna.

O co chodzi w superzapisie? Permutacje, czyli ustawienia elementów w dowolnej kolejności, zapisywać można na wiele sposobów. Można po prostu wypisać kolejne elementy, tak jak mieliśmy je przedstawione na początku: $(6, 2, 5, 1, 3, 4)$. Nie widać tu jednak, jakie powstają cykle. Można użyć zapisu cyklowego, czyli wypisać cykle permutacji, jak zrobiliśmy to powyżej: $[1, 6, 4], [2], [3, 5]$. Zapis ten nie jest jednak jednoznaczny (np. $[5, 3], [2], [4, 1, 6]$ odpowiada tej samej permutacji), ponadto wymaga dodatkowych nawiasów, które powiedzą nam, gdzie cykl się kończy, a gdzie zaczyna. Natomiast superzapis jest pozbawiony wszystkich tych wad i ma same zalety. Dlatego jest naprawdę super.

Aby skonstruować superzapis, spróbujmy ujednoznacznić zapis cyklowy. W tym celu na początku każdego cyklu ustawmy jego najmniejszy element. Dla naszej przykładowej permutacji dostajemy cykle $[\underline{1}, 6, 4]$, $[\underline{2}]$ oraz $[\underline{3}, 5]$. Standardowo uszeregowalibyśmy te cykle według tych najmniejszych elementów rosnąco. Będziemy jednak sprytniejsi (musimy w końcu ratować swój honor po tym, jak bezsensownie zatrzasnęliśmy sobie klucze…) i uszeregujemy je według najmniejszych elementów malejąco. Uzyskamy wtedy $[\underline{3}, 5], [\underline{2}], [\underline{1}, 6, 4]$. Okazuje się, że w tym zapisie możemy pozbyć się nawiasów! Dostajemy ciąg $(3, 5, 2, 1, 6, 4)$, i on jest właśnie superzapisem!



Kluczowa obserwacja: nowe cykle w superzapisie zaczyna zawsze element mniejszy niż wszystkie poprzednie elementy. Powyższy rysunek ilustruje superzapis $(3, 5, 2, 1, 6, 4)$ (niestety, brak mu metrum).

Zastanówmy się, czemu możemy pozbyć się nawiasów. Popatrzmy na nasz ciąg. Pierwszy cykl zaczyna się od 3. Potem jest 5. Skoro 5 jest większe niż 3, to nie może zaczynać nowego cyklu, bo początek kolejnego cyklu musi być mniejszy niż początek obecnego. Potem widzimy 2 – skoro 3 było najmniejszym elementem w swoim cyklu, to znaczy, że 2 musi być w innym cyklu. Pierwszy cykl to zatem $[3, 5]$. Po 2 mamy 1, które nie może być w cyklu z 2. A więc drugi cykl to $[2]$. Od 1 zaczyna się ostatni cykl, którego nic już nie przerwie, bo nie znajdziemy nic mniejszego. Ostatni cykl to zatem $[1, 6, 4]$. Odczytaliśmy, jakie są cykle, a zatem wiemy, jaka to permutacja. Superzapis jest więc odwracalny – każdemu superzapisowi odpowiada dokładnie jedna permutacja. Super!

Formalnie, superzapis zdefiniować możemy jako bijekcję f na zbiorze wszystkich permutacji $\{1, \ldots, n\}$. Dla $n = 3$ mamy na przykład:
$f(1, 2, 3) = (3, 2, 1)$, $f(1, 3, 2) = (2, 3, 1)$,
$f(2, 1, 3) = (3, 1, 2)$, $f(2, 3, 1) = (1, 2, 3)$,
$f(3, 1, 2) = (1, 3, 2)$, $f(3, 2, 1) = (2, 1, 3)$.

Wróćmy jednak do naszego pytania: jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdym cyklu jest przynajmniej jedna ze skarbonek $1, 2, \ldots, k$? Popatrzmy na pierwszą liczbę w superzapisie. Jeżeli jest ona większa niż k, to znaczy, że istnieje cykl, w którym najmniejszy element jest większy niż k. W takiej sytuacji nie uda nam się otworzyć wszystkich skarbonek. Jeżeli z kolei pierwsza liczba jest mniejsza bądź równa k, to znaczy, że w każdym cyklu jest taka liczba (bo najmniejszy element w każdym cyklu jest $\leqslant k$). I wtedy nam się uda.

Czy Dociekliwy Czytelnik, korzystając z superzapisu, będzie potrafił obliczyć prawdopodobieństwo, że w losowej permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ liczba 1 jest w cyklu z 2, ale nie z 3? Albo że liczba 1 jest w cyklu długości k?

Pozostaje stwierdzić, ile jest permutacji, które w swoim superzapisie mają na pierwszej pozycji liczbę $1, 2, \ldots, k$? Dla każdej liczby – także większej niż k – jest ich tyle samo, czyli $1/n$ wszystkich. Wynika to z tego, że superzapis jest odwracalny, czyli jeden superzapis odpowiada jednej permutacji. Prawdopodobieństwo, że na pierwszej pozycji w superzapisie jest liczba mniejsza bądź równa k, jest więc równe dokładnie k/n. I to jest właśnie prawdopodobieństwo tego, że uda nam się otworzyć wszystkie skarbonki.

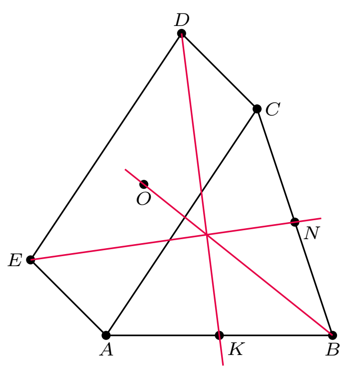
Okazało się, że klucz do rozwiązania nie chował się w skarbonkach, a był na pierwszej pozycji w superzapisie.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1699. Liczba naturalna większa niż 10^3 daje te same reszty przy dzieleniu przez 40 i przez 625. Jaka może być cyfra tysięcy tej liczby?
Rozwiązanie na str. 13

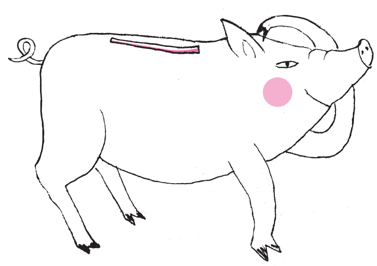
M 1700. Każde pole planszy 100×100 jest pomalowane na biało lub czarno, przy czym wszystkie pola przylegające do boków planszy są czarne. Ponadto na planszy nie ma jednokolorowego kwadratu 2×2. Udowodnij, że na planszy istnieje kwadrat 2×2 pomalowany „w szachownicę", tzn. niezawierający sąsiadujących pól w tym samym kolorze.
Rozwiązanie na str. 5



M 1701. W trójkącie ABC budujemy równoległobok $ACDE$ na zewnątrz trójkąta. Punkt O jest środkiem równoległoboku, natomiast punkty K i N są środkami odcinków AB i BC. Udowodnij, że proste DK, EN i BO przecinają się w jednym punkcie.
Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1041. Dwie niewielkie, sferyczne elektrody o promieniu r każda umieszczono w jednorodnym, słabo przewodzącym ośrodku o oporze właściwym ρ. Odległość między elektrodami jest znacznie większa od r. Oszacuj wartość oporu elektrycznego R między nimi.
Rozwiązanie na str. 10



F 1042. Wartość pola elektrycznego mierzona przy powierzchni Ziemi wynosi $E_0 \approx 100$ V/m. Na wysokości 1,5 km nad Ziemią pole elektryczne wynosi $E_1 \approx 25$ V/m. Ile wynosi średnia gęstość d ładunku elektrycznego atmosfery w pobliżu Ziemi? Przenikalność elektryczna próżni $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m, a promień Ziemi $R \approx 6400$ km.
Rozwiązanie na str. 11