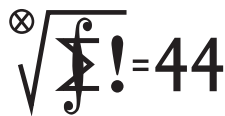


## Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2022

Lista uczestników ligi zadaniowej

### Klub 44 M

po zakończeniu sezonu  
(roku szkolnego) 2020/21

Błażej Żmija	1 – 40,50
Janusz Olszewski	21 – 39,34
Kacper Morawski	37,16
Witold Bednarek	8 – 36,36
Adam Woryna	3 – 36,14
Paweł Najman	8 – 34,25
Tomasz Czajka	33,74
Marcin Kasperski	4 – 32,80
Andrzej Kurach	2 – 29,11
Stanisław Bednarek	2 – 27,19
Radosław Kujawa	27,13
Piotr Sołtan	27,12
Tomasz Wietecha	13 – 25,91
Janusz Wojtal	25,48
Marek Spychała	3 – 24,85
Norbert Porwol	24,02
Jędrzej Biedrzycki	23,05
Piotr Lipiński	1 – 23,02
Marian Łupieżowiec	1 – 21,26
Marcin Małogrosz	4 – 20,62
Michał Kieza	4 – 20,46
Karol Matuszewski	1 – 19,74
Szymon Tur	19,46
Grzegorz Wiączkowski	19,44
Semen Slobodianuk	17,86
Paweł Kubit	7 – 17,80
Marek Prauza	4 – 16,62
Jerzy Cisło	15 – 15,81
Roksana Słowik	2 – 14,38

Legenda (przykładowo): stan konta 8 – 36,36 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 36,36 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 13 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2019, 2020 lub 2021.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Niech więc liczba  $c$  spełnia warunki (1) i niech  $x_1, \dots, x_n$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Oznaczając  $k_i = \lfloor x_i \rfloor$  oraz pisząc  $x_i = k_i + r_i$ , dostajemy do udowodnienia nierówność

$$(2) \sum_{i=1}^n (ck_i + \lfloor cr_i \rfloor) \geq (c-1) \sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^n k_i + \left\lfloor \sum_{i=1}^n r_i \right\rfloor,$$

równoważną następującą:

$$\sum_{i=1}^n \lfloor cr_i \rfloor \geq \left\lfloor \sum_{i=1}^n r_i \right\rfloor.$$

## Zadania z matematyki nr 835, 836

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**835.** Dana jest liczba naturalna  $n$  podzielna przez 3 oraz ciąg  $(x_1, \dots, x_n)$  o wyrazach 1, 2 lub 3, przy czym jedynek, dwójek i trójek jest tyle samo (po  $n/3$ ). Dowieść, że dla pewnych numerów  $k, l$  ( $1 \leq k \leq l \leq n$ ) zachodzi równość  $x_k + \dots + x_l = n$ .

**836. (a)** Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych  $x$ , dla których oba wyrażenia  $x^{1/2} + x^{-1/2}$  oraz  $x^{1/3} + x^{-1/3}$  mają wartości całkowite.

**(b)** Ustalić, ile jest liczb  $x \geq 1$  o powyższej własności takich, że  $\lfloor x \rfloor$  ma w zapisie dziesiętnym nie więcej niż 2022 cyfry.

Zadanie 836 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Kubit.

## Rozwiązania zadań z numeru 10/2021

Przypominamy treść zadań:

**827.** Niech  $T_m$  oznacza liczbę naturalną, której zapis dziesiętny składa się z  $m$  trójek (np.  $T_4 = 3333$ ). Wyjaśnić, czy istnieją takie liczby naturalne  $m, n$ , że suma cyfr liczby  $nT_m$  jest mniejsza niż  $3m$ .

**828.** Dana jest liczba naturalna  $n \geq 2$ . Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste  $c$  takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x_1, \dots, x_n$  zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n \lfloor cx_i \rfloor \geq (c-1) \sum_{i=1}^n \lfloor x_i \rfloor + \left\lfloor \sum_{i=1}^n x_i \right\rfloor.$$

**827.** Odpowiedź: nie istnieją.

Dowód: niech  $s(N)$  oznacza sumę cyfr liczby  $N$ . Ustalmy liczbę naturalną  $m$ . Tezę  $s(nT_m) \geq 3m$  wykażemy przez indukcję względem  $n$ . Dla  $n = 1, 2, 3$  jest to oczywiste. Weźmy  $n \geq 4$  i założmy, że  $s(kT_m) \geq 3m$  dla  $k = 1, \dots, n-1$ . Przyjmijmy, że liczba  $nT_m$  ma  $m+r+1$  cyfr ( $r \geq 0$ ). Zapiszmy ją w postaci  $nT_m = 10^r A + C$ , gdzie  $10^m \leq A < 10^{m+1}$ ,  $0 \leq C < 10^r$ . Weźmy pod uwagę różnicę

$$\begin{aligned} R &= nT_m - 3T_m \cdot 10^r = (10^r A + C) - (10^m - 1) \cdot 10^r = \\ &= 10^r B + C, \quad \text{gdzie } B = A + 1 - 10^m. \end{aligned}$$

Jasne, że  $s(A+1) \leq s(A) + 1$ . Zapis liczby  $B$  to zapis liczby  $A+1$ , z cyfrą wiodącą zmniejszoną o 1. Stąd  $s(B) = s(A+1) - 1 \leq s(A)$ , i wobec tego  $s(nT_m) = s(A) + s(C) \geq s(B) + s(C) = s(R)$ . A ponieważ  $R = (n-3 \cdot 10^r)T_m$ , zatem z założenia indukcyjnego  $s(R) \geq 3m$ , i mamy nierówność  $s(nT_m) \geq 3m$ , czyli tezę indukcyjną. Na mocy zasady indukcji ta nierówność zachodzi dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ .

**828.** Załóżmy, że  $c$  jest liczbą o podanej własności. Biorąc najpierw  $x_1 = \dots = x_n = 1$ , a następnie  $x_1 = \dots = x_n = 1/n$ , dostajemy (odpowiednio)  $n \lfloor c \rfloor \geq nc$  oraz  $n \lfloor c/n \rfloor \geq 1$ . Pierwsza z tych nierówności pokazuje, że  $c$  jest liczbą całkowitą; druga – że  $\lfloor c/n \rfloor$  jest liczbą dodatnią, więc nie mniejszą niż 1. Uzyskujemy warunki:

$$(1) \quad c \in \mathbb{N}, \quad c \geq n,$$

konieczne do tego, by liczba  $c$  miała żadaną własność. Pokażemy, że są one również wystarczające.

Oznaczmy lewą i prawą stronę tej ostatniej nierówności odpowiednio przez  $L$  i  $P$ . Szacujemy:

$$L > \sum_{i=1}^n (cr_i - 1) \geq n \sum_{i=1}^n r_i - n \geq n(P-1) \geq P-1.$$

Liczby  $L$  i  $P$  są całkowite, więc skoro  $L > P-1$ , znaczy to, że  $L \geq P$ ; nierówność (2) jest wykazana.

Stąd odpowiedź: własności (1) dokładnie charakteryzują liczby  $c$ , o które pyta zadanie.

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (15), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (21), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (13), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek (6), P. Kubit (7), J. Cisło (15), W. Bednarek (8), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedziej, M. Miodek, M. Małogrosz (4), K. Kamiński, J. Fiett, M. Spychała (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczbą w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, E. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, A. Kurach, J. Łazuka, J. Małopolski, E. Merta, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, M. Pater, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, P. Burdzy, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Józwick, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, K. Matuszewski, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikula, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, K. Trautman, P. Wach, J. Węgrecki, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zajac, Z. Zaus, K. Zawisławski, B. Żmija, P. Żmijewski.

## Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 M w roku szkolnym 2020/21

Liczby zakończone zerem domagają się uczczenia: oto 40 lat skończyła matematyczna liga zadaniowa! Dwadzieścia lat temu, z okazji analogicznej (choć o połowę skromniejszej), w dorocznym omówieniu ( $\Delta_{02}^2$ ), uraczyliśmy Czytelników ciekawą statystyką, dającą obraz uczestnictwa w pierwszych dwudziestu sezonach ligowych. Przypomnijmy: sezon ligowy to w zasadzie rok szkolny, wrzesień–czerwiec. We wrześniu roku 1981 ukazały się zadania nr 1, 2, 3 (!). Tak; bowiem przez pierwsze trzy i pół roku mieliśmy po trzy zadania w numerze. Potem do matematyki dołączyła fizyka i od stycznia 1985 zaczęliśmy zamieszczać po dwa zadania z każdej z tych dwóch dziedzin.

Wspomniana statystyka zasługuje na kontynuację. Popatrzmy, jak to się kształtowało w kolejnych czterech dziesięcioleciach, od startu aż do sezonu czterdziestego. W kolejnych kolumnach tabelki widzimy:

- (w nawiasie) liczbę zadań z matematyki w dziesięcioleciu;
- liczbę nowych uczestników ligi;
- (grubą czcionką) liczbę nowych członków **Klubu 44 M**;
- liczbę przekroczeń bariery „44 punkty” (różni się od poprzedniej tym, że liczone są przekroczenia powtórne i wszystkie dalsze);

1981–1991	(222)	506	<b>66</b>	114
1991–2001	(202)	122	<b>29</b>	70
2001–2011	(200)	95	<b>19</b>	77
2011–2021	(200)	72	<b>21</b>	86

(statystykę w rozbięciu na pojedyncze roczniki znajdzie Czytelnik w elektronicznym wydaniu numeru).

Najliczniejszy udział widać w latach początkowych; działał urok nowości – ale chyba nie tylko: życie wówczas było trochę inne; więcej czasu można było przeznaczać na beztroską zabawę (jaką nasza liga zawsze pragnęła być i pragnie pozostać).

Suma liczb z przedostatniej kolumny, równa 135, to aktualna liczba osób zaliczonych w grono członków **Klubu 44 M**; suma liczb z jeszcze poprzedniej kolumny – to łączna liczba wszystkich uczestników, którzy pojawili się w lidze (do momentu zamknięcia sezonu 2020/21); wynosi ona 795.

Pamiętajmy jednak, że niektórzy z nich odeszli tam, skąd się nie wraca. O niektórych wiemy (notki żałobne w lutowych numerach roczników 1993, 1999, 2008, 2016); o innych możemy nie wiedzieć; im wszystkim należy się chwila smutnej zadumy i ciepłe wspomnienie.

\* \* \*

Teraz wybrane zadania z omawianego sezonu (ostatniego, czterdziestego) – więc, jak zwykle, te trudniejsze (wysoki współczynnik trudności  $WT$  i/lub niska liczba poprawnych rozwiązań  $LPR$ ), a także te, w których uczestnicy zaintrygowali niebanalnymi pomysłami rozwiązań albo ciekawymi komentarzami. W e-wydaniu, jak przed rokiem, zamieszczamy wybrane fragmenty prac (w zakładce: „Załącznik do elektronicznego omówienia ligi matematycznej”).

**Zadanie 806.**  $[a_1 = 2; a_{n+1} = 2^{a_n} + 2; f(x) = x^2 - x \Rightarrow \forall n \geq 1: f(a_{n+1}) \equiv 0 \pmod{f(a_n)}]$  ( $WT=1,80$ ;  $LPR=14$ ). Trudności tu niewiele. **Piotr Kumor** zwrócił uwagę ( $\rightarrow$  e-wydanie numeru), że już w klasycznej książeczce W. Sierpińskiego *250 zadań z elementarnej teorii liczb* znajduje się rozumowanie indukcyjne, dające rozwiązanie naszego zadania; postawił też pytanie, czy poza ciągiem  $(a_n)$  istnieją liczby całkowite  $m \geq 2$  takie, że  $m \mid 2^m + 2$ ,  $(m-1) \mid 2^m + 1$ ; pierwszy z tych warunków spełnia np. liczba  $m = 946$  ( $\neq a_n$  dla wszystkich  $n$ ); czy jedyna taka?

**Zadanie 810.** [Permutacje  $(x_1, \dots, x_n)$  zbioru  $\{1, \dots, n\}$  o własnościach  $\pmod{n}$ : (i)  $\sum_{i=1}^k x_i \not\equiv \sum_{i=1}^l x_i$  dla

$k \neq l$ ; (ii)  $k + x_k \not\equiv l + x_l$  dla  $k \neq l$ ; teza: permutacja o własności (i) istnieje  $\Leftrightarrow$  permutacja o własności (ii) nie istnieje] ( $WT=2,03$ ;  $LPR=11$ ). Wszyscy pokazali, bez większych trudności, że istnienie permutacji jednego lub drugiego typu zależy po prostu od parzystości liczby  $n$ . Kto ciekawy, ile jest takich permutacji (dla danego parzystego/nieparzystego  $n$ ), znajdzie odpowiedź w OEIS (ciągi A141599, A006717) – na co zwrócił uwagę **Michał Adamaszek**.

**Zadanie 812.**  $[\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: \prod_{k=2}^n (2^k - 2) \equiv 0 \pmod{n!}]$  ( $WT=1,60$ ;  $LPR=19$ ). To teoria liczb – jak sugeruje treść zadania i prawie wszystkie rozwiązania (w tym firmowe)? Czy może raczej algebra liniowa

z kombinatoryką? Popatrzmy na rozwiązanie, jakie przysłał **Jerzy Cisko**: W przestrzeni liniowej  $\mathbb{Z}_2^n$  wybieramy bazę wektorów  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , biorąc dowolny wektor  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$  ( $2^n - 1$  możliwości); zaś mając wektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j$ , rozpinające podprzestrzeń wymiaru  $j$  (więc mocy  $2^j$ ), mamy  $2^n - 2^j$  możliwości wyboru wektora  $\mathbf{v}_{j+1}$ ; liczba uporządkowanych baz wynosi zatem

$$M_n := \prod_{j=0}^{n-1} (2^n - 2^j) = 2^{n(n-1)/2} \prod_{k=1}^n (2^k - 1).$$

Zliczamy teraz  $n$ -wymiarowe sympleksy o ponumerowanych wierzchołkach: pierwszy wierzchołek wybieramy na  $2^n$  sposobów, a pozostałe uzyskamy, dodając do niego wektory dowolnej bazy uporządkowanej; zatem liczba takich sympleksów wynosi  $2^n \cdot M_n$  i dzieli się przez  $(n+1)!$ , bo tyle jest możliwości ponumerowania wierzchołków. Cofając  $n$  o jeden, widzimy, że  $n!$  jest dzielnikiem liczby  $2^{n-1} M_{n-1}$ . To już prawie teza zadania – pozostaje jedynie skontrolować potęgę dwójki w liczbach:  $n!$  oraz tej danej w zadaniu – a to nietrudne ćwiczenie.

Na podobnym pomysłe (dopracowanym w języku macierzy) oparł **Janusz Olszewski** jedno z trzech (!) przysłanych rozwiązań; w każdym z nich ( $\rightarrow$  e-wydanie) wykazał słuszność tezy zadania ze stałą 2 zastąpioną przez dowolną liczbę naturalną  $a \geq 2$ .

[Mała uwaga. Przytoczone rozumowanie pokazuje, że  $2^n M_n / (n+1)!$  to liczba  $n$ -sympleksów w  $\mathbb{Z}_2^n$  (bez numeracji wierzchołków). Dla  $n=3$  to jest 56; wynikałoby stąd, że jest dokładnie 56 czworościanów rozpiętych przez czwórki wierzchołków sześcianu. Jednak nie. Pozostawiamy Czytelnikom znalezienie ich faktycznej liczby oraz zagadkę: czy właśnie została wykryta sprzeczność w matematyce?]

**Zadanie 813.** [Dany  $n$ -kąć wypukły  $W$ , ma  $N$  przekątnych;  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < N$ ;  $S$  – zbiór wszystkich punktów przecięć przekątnych wewnątrz  $W$  (żadne trzy się nie spotykają)  $\Rightarrow \exists M \subset S$ :  $|M| = m$ , nie zawierający cyklu (w cyklu każde kolejne dwa punkty na jednej przekątnej – ale żadne trzy)] ( $WT=2,95$ ;  $LPR=7$ ). Wystarczy rozważać  $m = N - 1$ . **Michał Adamaszek** prosto i dobitnie wyjaśnił, o czym jest to zadanie: należy patrzeć na  $N$  przekątnych jako wierzchołki grafu; połączone są takie dwa wierzchołki, że odpowiadające im przekątne przecinają się wewnątrz  $W$ . Cykle krawędziowe w tym grafie to dokładnie cykle punktów  $S$  według określenia w zadaniu. Graf jest spójny (każde dwa niepołączone wierzchołki mają wspólnego sąsiada); bierzemy jako  $M$  dowolny minimalny spójny podzbiór  $S$  (czyli zbioru krawędzi grafu), wiążący wszystkie  $N$  wierzchołków; z minimalności wynika, że nie ma w nim cyklu – jest więc drzewem, zatem  $|M| = N - 1$ , czyli tak, jak trzeba.

**Zadanie 815.** [ $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\forall x, y: f(x+y^3) + g(x^3+y) = h(xy)$ ;  $f, g, h = ?$ ] ( $WT=3,01$ ;  $LPR=6$ ). Tylko funkcje stałe (takie, że  $f+g=h$ ) spełniają to równanie. Rozwiązanie firmowe

znalazł **P. Kumor**. Nieco inaczej: **M. Adamaszek**, **K. Matuszewski**, **M. Spychała**, **A. Woryna** – pokazując (różnymi metodami, nie bez wysiłku), że  $f$  jest stała w pewnym otoczeniu zera; iterowanie równości  $f(x^9) = f(x)$  (łatwej do uzasadnienia) pozwala wtedy wywnioskować, że  $f$  jest stała na  $\mathbb{R}$ . Jeszcze inaczej, oryginalnie, **J. Olszewski** – przez sprowadzenie do ciekawego układu trzech równań wielomianowych – choć też nie całkiem krótko ( $\rightarrow$  e-wydanie). I jeszcze jedna praca, zawierająca istotę rozumowania, ale z tak licznymi pomyłkami i niedopracowaniami, że nie można jej uznać za pełne rozwiązanie.

Zadanie zostało wzięte z dawnej olimpiady matematycznej jednego z krajów europejskich i włączone do konkursu w nadziei, że błyskotliwe rozwiązanie poznamy od uczestników; jednak nie – więc zapewne prościej zrobić się tego nie da.

**Zadanie 818.** [ $\forall n \geq 9 \exists m \leq n/3: 2^n - 2^m \equiv 0 \pmod{n}$ ; ( $m, n \in \mathbb{N}$ )] ( $WT=2,23$ ;  $LPR=11$ ). Kilku uczestników zauważyło (a nie zauważył tego zawczasu redaktor ligi), że prawie takie samo zadanie było już kiedyś w lidze ( $\Delta_{16}^9$ , zadanie 726). W tym „prawie” kryje się jednak spory kawałek matematyki. Jedyna różnica w treści to oszacowanie dla  $m$ : tam  $n/2$ , tu  $n/3$ ; wszelako to różnica jakościowa. Rozwiązanie firmowe znacznie łatwiejszego zadania 726 nie dawało się łatwo przenieść na nową sytuację, nie dawało nawet znaczącej wskazówki (choć jeden z uczestników złapał się na tę niezamierzoną pułapkę). W obecnym zadaniu wszystkie (poprawne) rozwiązania biegły jednym torem: albo (jak w „firmówce”) z jawnym użyciem funkcji Eulera, albo z wyprowadzeniem jej potrzebnych własności (nie nazywając jej po imieniu).

**Zadanie 820.** [ $\forall a, b, c > 0: \sum_{\text{cykl}} \frac{a^2}{b^2+bc} \geq \frac{3}{2}$ ] ( $WT=1,76$ ;  $LPR=16$ ). Urokliwie elementarne rozwiązanie, jakie zaproponował **Witold Bednarek**, autor zadania (i które zamieściliśmy jako firmowe), pokazuje, że zadanie mogłoby się nadawać do konkursu dla juniorów. Ale oczywiście było ono podatne i na inne techniki. Odnotujmy niektóre podejścia: **Janusz Olszewski** udowodnił ogólniejszą nierówność, słuszną dla  $p, q, x, y, z > 0$ :  $\sum_{\text{cykl}} \frac{x}{py+qz} \geq \frac{3}{p+q}$ ; daje ona tezę zadania, gdy  $(x, y, z) = (a^2, b^2, c^2)$ ,  $(p, q) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  (bo  $bc \leq (b^2 + c^2)/2$ ). Podobną nierówność, tylko dla  $p/q = 3$ , ale z rozszerzeniem na  $n$  składników  $x_i$ , wskazał **Piotr Kumor**; szczegóły tych prac w e-wydaniu numeru.

Szczyt zwięzłości osiągnął **Mikołaj Pater**, używając nierówności Höldera  $(\sum x_i y_i z_i)^3 \leq (\sum x_i^3) (\sum y_i^3) (\sum z_i^3)$ ; (sumy po  $i = 1, 2, 3$ ); wystarczy podstawić  $x_i = a_i^{2/3} (a_{i+1}^2 + a_{i+1} a_{i+2})^{-1/3}$ ,  $y_i = (a_i a_{i+1})^{1/3}$ ,  $z_i = (a_{i+1} + a_{i+2})^{1/3}$ , by przy oznaczeniu  $(a_1, a_2, a_3) = (a, b, c)$  dostać nierówność nieco mocniejszą od tej z zadania.

Kilka prac zaczynało się słowami: „Załóżmy b.s.o., że  $a \geq b \geq c$ ”. Tak by było, gdyby rozważane wyrażenie było symetryczne; tu jednak mamy tylko

niezmienniczość cykliczną, więc logika szwankuje. Można jedynie „b.s.o.” przyjąć, że  $a \geq b \geq c$  lub  $a \leq b \leq c$  (i oddzielnie analizować te dwie sytuacje).

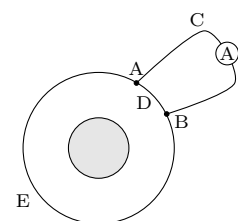
**Zadanie 822.**  $[\triangle ABC]$ ; dla  $D \in BC$ :  $U, V$  – środki okręgów wpisanych w  $ABD, ACD$ ;  $\omega_D$  – okrąg  $DUV \Rightarrow$  wszystkie okręgi  $\omega_D$  mają punkt wspólny ( $WT=3,05; LPR=6$ ). Przekombinowane było rozwiązanie firmowe (choć ciekawe; koncepcja: **Mikołaj Pater**, autor zadania). Uczestnicy ligi robili to prościej. **Jerzy Cisło**:  $U, V$  leżą na dwusiecznych kątów  $ADB, ADC$ , więc  $\sphericalangle UDV = 90^\circ$ ,

co oznacza, że środek  $S$  odcinka  $UV$  jest środkiem okręgu  $\omega_D$ ; jeśli teraz  $K, L, M$  to punkty styczności boku  $BC$  z okręgami wpisanymi w trójkąty  $ABC, ABD, ACD$ , to dodając stronami trzy równości  $BK = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$ ,  $-BL = \frac{1}{2}(AD - AB - BD)$ ,  $-DM = \frac{1}{2}(AC - AD - CD)$ , otrzymujemy  $LK - DM = 0$ ; a skoro  $S$  leży na symetralnej odcinka  $LM$ , wynika stąd, że  $SK = SD$ , czyli  $K \in \omega_D$ ; tak więc  $S$  jest punktem, którego istnienie należało wykazać. Podobne rozwiązania: **M. Adamaszek, Ł. Merta, J. Olszewski** oraz (z pomocą trygonometrii) **A. Woryna**.

## Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2022



Rys. 1

### Zadania z fizyki nr 732, 733

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**732.** Nieważki pręt z umocowaną na końcu kulką o masie  $m$  postawiono pionowo na podłodze. Kulkę możemy traktować jako punkt materialny. Pręt zaczyna przewracać się z zerową prędkością początkową i nie ślizga się do chwili, gdy przestaje naciskać na podłogę. Jaką wartość ma w tej chwili kąt  $\alpha_0$ , jaki pręt tworzy z pionem? Ile wynosi współczynnik tarcia między prętem a podłogą? Ile wynosi siła tarcia, gdy pręt tworzy z pionem kąt  $\alpha \leq \alpha_0$ ?

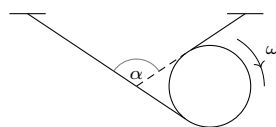
**733.** Zmienne pole magnetyczne wytwarza w jednorodnym przewodniku  $ADBEA$  w kształcie okręgu (rys. 1) stałą siłę elektromotoryczną  $\varepsilon$ . Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny przewodnika i przechodzą przez powierzchnię w kształcie koła zacięniowaną na rysunku, pole ma oś symetrii przechodzącą przez środek przewodzącego pierścienia i prostopadłą do płaszczyzny przewodnika. W punktach  $A$  i  $B$  do pierścienia podłączony jest amperomierz. Opory przewodników  $ADB, AEB$  i  $ACB$  wynoszą odpowiednio  $R_1, R_2$  i  $R_3$ . Jakie jest napięcie między punktami  $A$  i  $B$ ?

### Rozwiązania zadań z numeru 10/2021

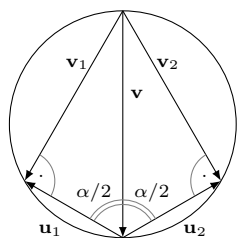
Przypominamy treść zadań:

**724.** Ciężka tarcza o promieniu  $R$  stacza się na dwóch nierozciągliwych niciach. Nici są nawinięte na tarczę, a ich wolne końce są zamocowane (rys. 2). Podczas ruchu tarczy nici są cały czas napięte. W pewnej chwili prędkość kątowa tarczy wynosi  $\omega$ , kąt pomiędzy nimi jest wtedy równy  $\alpha$ . Jaką prędkość ma w tym momencie środek tarczy?

**725.** Przyjmijmy, że Ziemia obiega Słońce po orbicie kołowej o promieniu  $R = 1$  j.a. Po jakim czasie spadłaby na Słońce, gdyby nagle została zatrzymana? Ziemię i Słońce potraktujmy jako punkty materialne.



Rys. 2



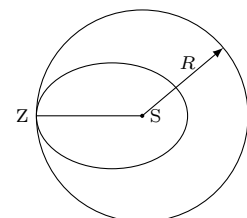
Rys. 3

**724.** Oznaczmy prędkości punktów styczności nici z tarczą w układzie odniesienia związanym ze środkiem tarczy przez  $\mathbf{u}_1$  i  $\mathbf{u}_2$ . Tworzą one ze sobą kąt  $\alpha$  i mają jednakowe wartości  $u = \omega R$ . W układzie odniesienia związanym z Ziemią prędkości tych punktów wynoszą odpowiednio  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}$  i  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}$ , gdzie  $\mathbf{v}$  jest szukaną prędkością środka tarczy. Ponieważ nici są nierozciągliwe, wektory  $\mathbf{v}_1$  i  $\mathbf{v}_2$  są prostopadłe do nici, a tym samym do wektorów  $\mathbf{u}_1$  i  $\mathbf{u}_2$ . Z rysunku 3 widać, że wektor prędkości tarczy tworzy z każdą z nici kąt  $\alpha/2$ , a jego wartość  $v = u / \cos(\alpha/2) = \omega R / \cos(\alpha/2)$ .

**725.** Gdy Ziemia krąży wokół Słońca o masie  $M$  po orbicie kołowej, jej prędkość  $v_0 = \sqrt{GM/R}$ , a okres obiegu  $T_0 = 2\pi R \sqrt{R/GM}$ . Rozważmy kolejno przypadki, w których Ziemia znajduje się w odległości  $R$  od Słońca w pewnym punkcie  $Z$  orbity kołowej, a jej prędkość w tym momencie jest mniejsza od  $v_0$  i coraz bardziej maleje (rys. 4). Tory ruchu są wtedy elipsami o malejących półosiach, a Słońce znajduje się w ognisku bardziej oddalonym od punktu  $Z$ . Dla każdej z tych elips spełnione jest trzecie prawo Keplera:  $T^2/a^3 = T_0^2/R^3$ , gdzie

$$T = T_0 \sqrt{a^3/R^3} \quad (*)$$

jest okresem obiegu, zaś  $a$  półosią wielką danej elipsy. W granicznym przypadku, gdy prędkość Ziemi w punkcie  $Z$  jest równa zero, elipsa staje się odcinkiem  $ZS$ , a półoś wielka tej zdegenerowanej elipsy wynosi  $R/2$ . Zgodnie z (\*) szukany czas spadania  $t = 0,5T_0 \sqrt{1/8} = 0,25\pi R \sqrt{2R/GM} \cong 65$  dób.



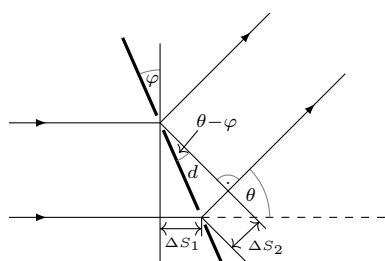
Rys. 4

## Czołówka ligi zadaniowej Klubu 44 F

po zakończeniu  
roku szkolnego 2020/21  
(po uwzględnieniu rozwiązań  
zadań 720 ( $WT=2,84$ ) i 721 ( $WT=3,18$ ))

Konrad Kapcia (Poznań)	1 – 42,51
Tomasz Rudny (Poznań)	41,38
Slawomir Buć (Mystków)	36,55
Mateusz Kapusta (Wrocław)	35,59
Jacek Konieczny (Poznań)	31,90
Ryszard Woźniak (Kraków)	31,46
Ryszard Baniewicz (Włocławek)	30,36
Aleksander Surma (Myszków)	4 – 27,75
Tomasz Wietecha (Tarnów)	15 – 25,35
Marian Łupieżowicz (Gliwice)	2 – 24,22
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	3 – 17,53
Jan Zambrzycki (Białystok)	3 – 12,27
Piotr Adamczyk (Warszawa)	1 – 11,90
Paweł Kubit (Kraków)	11,30

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2019–2021 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 11 punktów. Liczba przed myślnikiem wskazuje, ile razy uczestnik zdobył 44 punkty.



## Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 F w roku szkolnym 2020/21

Średni współczynnik trudności zadań okazał się w tym roku niższy niż w latach ubiegłych, wzrosła natomiast liczba przysyłanych rozwiązań. Aż sześciu uczestników przekroczyło próg 44 punktów: Tomasz Wietecha po raz piętnasty (!), Michał Koźlik po raz piąty, Krzysztof Magiera i Paweł Perkowski po raz czwarty, Jan Zambrzycki po raz trzeci i Piotr Adamczyk po raz pierwszy. Ustaliła się grupa uczestników, którzy przysyłali rozwiązania bardzo regularnie i często bez żadnych usterek. Najbardziej skuteczny okazał się Piotr Adamczyk, którego 14 rozwiązań uzyskało maksymalną ocenę, Tomasz Wietecha takich rozwiązań przysłał 13.

W zadaniu **704** światło monochromatyczne padało prostopadłe na siatkę dyfrakcyjną, której szczeliny ustawione były pionowo. Należało odpowiedzieć na pytanie, jak zmieni się obraz interferencyjny na ekranie, gdy siatkę obrócimy o kąt  $\varphi < \pi/2$  wokół osi równoległej do szczelin siatki. Niestety, w rozwiązaniu firmowym pojawił się błąd. Maksymalny kąt ugięcia  $\theta$  w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara (rysunek obok) wynosi  $\pi/2 + \varphi$ , ale prążki na ekranie mogą powstać dla  $\theta < \pi/2$ . Zatem maksymalna liczba maksimów na ekranie dla dodatnich  $\theta$  wynosi  $k_+ = \lfloor d/\lambda \rfloor$ , a nie jak podano  $\lfloor d(1 + \sin\varphi)/\lambda \rfloor$ . Zadanie było otwarte, uczestnicy mogli pisać o tym, co uznali za istotne. Maksymalną ocenę za to zadanie otrzymał **Konrad Kapcia**. Zadanie **721** ( $WT=3,21$ ) dotyczyło elektrostatyki. Wewnątrz wydrążonej, naładowanej, przewodzącej kuli znajdowała się współśrodkowa z nią kula, również naładowana i przewodząca. Między kulą a powłoką umieszczony był ładunek punktowy. Należało znaleźć potencjał kuli oraz powłoki. Pełne i bezbłędne rozwiązanie przysłał **Piotr Adamczyk**, który do znalezienia potencjału kuli wykorzystał metodę obrazów. Tomasz Wietecha poprawnie obliczył potencjał kuli, stosując metodę taką jak w rozwiązaniu firmowym, z tajemniczych powodów (może przez przeoczenie) nie odpowiedział jednak na prostsze pytanie o potencjał powłoki.

**Tomasz Wietecha** był jedynym uczestnikiem, który uzyskał maksymalną ocenę za zadanie **720** ( $WT=2,84$ ). Poszukiwana była tam zmiana prędkości satelity poruszającego się w górnych warstwach atmosfery po wykonaniu jednego okrążenia, przy założeniu, że siła oporu ze strony rozrzedzonego powietrza jest stała. Większość uczestników uznała, że prędkość satelity zmaleje, tymczasem praca siły oporu powoduje zmniejszenie całkowitej energii satelity, jego promień orbity maleje, a prędkość rośnie.

W zadaniu **718** ( $WT=3,1$ ) należało znaleźć zależność od czasu prędkości samochodu, którego silnik pracuje od początku z pełną mocą, a opór powietrza i opory mechanizmów zaniedbujemy. Maksymalne oceny dostali za swoje rozwiązania **Paweł Perkowski** i **Tomasz Wietecha**. Część uczestników nie uwzględniła faktu, że na początku ruchu występuje poślizg, inni uznali, że poślizg występuje przez cały czas ruchu.

Ciekawostką jest, że jeden z uczestników podał odnośniki do źródeł zawierających rozwiązania dwóch tegorocznych zadań ligowych, co obligowało do wystawienia za nie maksymalnej oceny, i do tego ograniczył swoją aktywność w klubie.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

