

zestawiać ze współczesnymi ogromnymi eksperymentami neutrinowymi.

Okazji do współdziałania różnych rodzajów eksperymentów w celu lepszego poznania natury neutrin w najbliższych latach będzie dużo więcej. W szczególności twórcy eksperymentu FASER planują prowadzenie badań przy wykorzystaniu specjalnego detektora FASER $\nu$  umieszczonego tuż przed głównym detektorem FASER. Będzie on nieco większy niż wyżej opisane podręczne urządzenie. FASER $\nu$  o długości 1 m umożliwi obserwację około  $10^4$  zderzeń neutrin z jądrami atomów wolframu. Głównym celem eksperymentu jest bardzo dokładne zmierzenie częstości i przebiegu tych procesów przy energiach neutrin około 1000 GeV, dla których nie zostało to dotychczas zrobione. W tym celu zastosowany zostanie nowoczesny detektor wykorzystujący emulsję filmową, który będzie mógł niejako robić zdjęcia poszczególnym zderzeniom i umożliwi wgląd w szczegółowy rozkład ich produktów.

Okazuje się, że lepsze zrozumienie procesu produkcji neutrin w zderzeniach protonów i ich późniejszych oddziaływań ma też istotne znaczenie dla rozwiązania niektórych zagadek związanych z analizą zderzeń wysokoenergetycznych promieni kosmicznych z atmosferą ziemską, jak również dla naszego rozumienia oddziaływań silnych wiążących jądra atomowe (tzw. chromodynamika kwantowa).

Taki wysokoenergetyczny proton docierający z przestrzeni kosmicznej do Ziemi ma energię  $E_p = 10^8$  GeV i zderza się ze „statycznym” protonem wewnątrz jądra tlenu lub argonu w atmosferze Ziemi. W układzie środka masy energia tego zderzenia jest opisana zmienną Mandelstama,  $s \simeq \sqrt{2E_p m_p} \simeq (14 \text{ TeV})^2$ , co odpowiada energii zderzeń w LHC. Pamiętajmy przy tym, że  $1 \text{ TeV} = 1000 \text{ GeV}$ .

Wyniki eksperymentów FASER i FASER $\nu$  będą więc miały wpływ na szereg dziedzin fizyki cząstek. Dostarczą też one nowych danych dotyczących fizyki neutrin taonowych, które nieustannie stanowią ogromny ból

głowy dla kolejnych pokoleń eksperymentatorów. Dość wspomnieć, że od czasu ich pierwszej doświadczalnej bezpośredniej obserwacji na przełomie tysiącleci w detektorze DONUT nadal dysponujemy zaledwie garścią takich zdarzeń kiedykolwiek zmierzonych z dużą dokładnością oraz dodatkowymi obserwacjami bazującymi na zjawisku oscylacji, które raportowały w późniejszych latach zespoły eksperymentalne IceCube, OPERA oraz SuperKamiokande.

Trwają też dyskusje nad rozszerzeniem tego programu badawczego na dalsze lata działania LHC. W tym celu rozważa się stworzenie jeszcze większego laboratorium podziemnego (*Forward Physics Facility*, FPF), który mógłby pomieścić więcej detektorów umieszczonych na linii osi zderzenia wiązki protonów w LHC. Wśród nich znaleźć by się mogła większa wersja eksperymentu FASER, ale też np. niedawno zaproponowany detektor FLArE (*Forward Liquid Argon Experiment*). Miałby on wykorzystywać technologię ciekłoargonowej komory projekcji czasowej oraz fotonowielacze zbierające pierwszy sygnał zderzenia w detektorze w postaci błysku (*flare*) scyntylacyjnego. Taki eksperyment mógłby też służyć do bezpośredniej detekcji stabilnych lekkich cząstek ciemnej materii, które mogą być nieustannie produkowane w LHC, lub też wykluczyć tego typu scenariusze teoretyczne. Pomimo pandemii w ostatnich miesiącach zorganizowano już (zdalnie) dwa duże międzynarodowe spotkania fizyków zainteresowanych rozbudową tego programu badawczego w LHC. Wykonano też szereg wstępnych prac inżynierskich w celu dokładnego zaplanowania nowego laboratorium i oszacowania kosztów jego budowy. Obecne szacunki opiewają na około 0,5–1% kosztów budowy LHC.

I tak na naszych oczach rodzi się całkiem nowy kierunek badawczy w LHC, co w tym przypadku ma znaczenie niemal dosłowne.

## Ciągi Dolda i punkty periodyczne

Grzegorz GRAFF\*, Mateusz SCHARMACH\*\*

Albrecht Dold (1928–2011), wybitny niemiecki matematyk, był autorem wielu eleganckich konstrukcji topologicznych. W jego pracy z 1984 roku pojawił się pewien specyficzny układ kongruencji, które zajmują ważne miejsce w teorii układów dynamicznych i topologii. Okazuje się, że idea, jaka leży u ich podłoża, jest o wiele bardziej uniwersalna. Artykuł [2] kończy się następującą definicją, która dla nas stanowić będzie punkt wyjścia.

Ciąg całkowitoliczbowy  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nosi nazwę *ciągu Dolda*, jeżeli dla wszystkich  $n \geq 1$

$$(1) \quad \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) a_k \equiv 0 \pmod{n}.$$

Funkcja  $\mu$  występująca w powyższym wzorze to klasyczna funkcja Möbiusa, zdefiniowana następująco:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } n = 1, \\ 0 & \text{jeżeli } n \text{ ma dzielnik będący kwadratem,} \\ (-1)^r & \text{jeżeli } n \text{ jest iloczynem } r \text{ różnych liczb pierwszych.} \end{cases}$$

\* Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej, Politechnika Gdańska  
\*\* Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

**Parę słów o  $\mu$ :** funkcja  $\mu$  Möbiusa ma wiele pożytecznych własności. Nietrudno udowodnić na przykład, że jeśli liczby naturalne  $a$  i  $b$  są względnie pierwsze, to  $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$ . Ponadto, jeśli  $n > 1$ , to  $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ , bowiem jedyne niezerowe składniki sumy po lewej stronie występują dla  $d$  będących iloczynami różnych pierwszych dzielników  $n$ , a liczba takich iloczynów parzystej długości jest równa liczbie iloczynów długości nieparzystej. Rozważmy teraz dowolny ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i niech  $\tilde{a}_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \tilde{a}_d &= \sum_{d|n} \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) a_e \stackrel{(a)}{=} \sum_{e|n} \sum_{d|n: e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) a_e = \\ &= \sum_{e|n} a_e \sum_{d|n: e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \stackrel{(b)}{=} \sum_{e|n} a_e \sum_{h|(n/e)} \mu(h) \stackrel{(c)}{=} a_n, \end{aligned}$$

gdzie równość (a) wynika z zmiany kolejności sumowania, (b) to podstawienie  $h = d/e$ , a (c) jest wnioskiem z uzasadnionego wcześniej faktu, że jeśli  $n/e > 1$ , to  $\sum_{h|(n/e)} \mu(h) = 0$ . Zauważmy ponadto, że jeśli pewien ciąg  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  spełnia  $a_n = \sum_{d|n} b_d$ , to jest on jednoznacznie wyznaczony przez  $(a_n)$ , musi być zatem  $b_n = \tilde{a}_n$  – stwierdzenie to nosi nazwę *wzoru inwersyjnego Möbiusa*.

Na pierwszy rzut oka ciągi Dolda wydają się dosyć zagadkowe: np. ciąg stały jest ciągiem Dolda (co wynika z jednej z przedstawionych wyżej własności funkcji  $\mu$ ), ale już tak prosty ciąg, jak  $c = (1, 2, 3, \dots)$ , nim nie jest, gdyż już dla  $n = 2$  nie spełnia wymaganych kongruencji:  $c_2 - c_1 \not\equiv 0 \pmod{2}$ .

Okazuje się, że ciągi Dolda mają ścisły związek z punktami stałymi iteracji odwzorowań. Oznaczmy przez  $\mathbf{Fix}(f)$  liczbę punktów stałych odwzorowania  $f$ , przeprowadzającego pewną przestrzeń  $X$  w siebie. Wówczas, niezależnie od odwzorowania, ciąg  $(\mathbf{Fix}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem Dolda! Podamy za chwilę dowód tej niebanalnej obserwacji. Zaczniemy od kilku podstawowych definicji i faktów. Punkt periodyczny  $x$  o okresie minimalnym  $n$  to taki punkt, że  $f^n(x) = x$ , ale dla  $1 \leq k < n$   $f^k(x) \neq x$ . Zdefiniujmy zbiór  $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$  obejmujący wartości kolejnych iteracji  $f$  w punkcie  $x$ , zwany orbitą punktu  $x$ . Orbitsy punktów periodycznych o okresie minimalnym  $n$  ( $n$ -orbitsy) są skończone i mają  $n$  elementów. Co więcej, nietrudno zauważyć, że dwie orbitsy albo się pokrywają, albo są rozłączne.

Załóżmy teraz, że zbiór punktów stałych odwzorowania  $f^n$  jest skończony. Każdy punkt z danej orbitsy  $O(x)$  o okresie minimalnym  $k$  wraca do siebie dopiero po  $k$  iteracjach. Zatem pojedyncza  $k$ -orbitsa generuje albo  $k$  (jeśli  $k | n$ ), albo 0 (jeśli  $k \nmid n$ ) punktów stałych odwzorowania  $f^n$ .

Oznaczając przez  $L(k)$  liczbę orbit o okresie minimalnym  $k$ , otrzymujemy:

$$(2) \quad \mathbf{Fix}(f^n) = \sum_{k|n} L(k) \cdot k.$$

Stosując wzór inwersyjny Möbiusa do formuły (2), otrzymujemy:

$$(3) \quad L(n) \cdot n = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) \mathbf{Fix}(f^k).$$

Widzimy zatem, że lewa strona powyższej równości jest podzielna przez  $n$ , zatem prawa strona także, a więc rzeczywiście  $(\mathbf{Fix}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem Dolda.

Aby dodatkowo utrwalić wprowadzone pojęcia, wprowadźmy wzór (3) bez odwoływania się do wzoru inwersyjnego Möbiusa, na pewnym prostym przykładzie. Rozważmy  $n = 6$  i pewną funkcję  $f : X \rightarrow X$  o skończonym zbiorze punktów okresowych. Spróbujmy wyrazić liczbę punktów o okresie minimalnym 6 poprzez punkty stałe  $f^k$  dla  $1 \leq k \leq 6$ . Z  $\mathbf{Fix}(f^6)$  musimy pozbyć się liczby punktów o mniejszych okresach minimalnych, dzielących 6, czyli 1, 2, 3, ale z drugiej strony wyrzuciliśmy trochę zbyt dużo, bo  $\mathbf{Fix}(f^2)$  i  $\mathbf{Fix}(f^3)$  zliczają także  $\mathbf{Fix}(f)$ , musimy zatem przywrócić wyrzucone dwukrotnie  $\mathbf{Fix}(f)$ . Mamy:

$$\begin{aligned} L(6) \cdot 6 &= \\ &= \mathbf{Fix}(f^6) - \mathbf{Fix}(f) - \mathbf{Fix}(f^2) - \mathbf{Fix}(f^3) + 2\mathbf{Fix}(f) = \\ &= \mathbf{Fix}(f^6) - \mathbf{Fix}(f^2) - \mathbf{Fix}(f^3) + \mathbf{Fix}(f) = \\ &= \sum_{k|6} \mu\left(\frac{6}{k}\right) \mathbf{Fix}(f^k). \end{aligned}$$

Podsumowując, kongruencje Dolda wynikają z faktu, że suma po prawej stronie wzoru (3), dzięki zasadzie „włączeń i wyłączeń”, redukuje się do liczby orbit  $n$ -elementowych pomnożonych przez  $n$ .

#### Macierze i ich iloczyny.

Macierz liczb wymiaru  $n \times m$  nazywamy po prostu tabelką o  $n$  wierszach i  $m$  kolumnach, wypełnioną liczbami. Aby zdefiniować iloczyn dwóch macierzy, wygodnie jest najpierw przypomnieć, czym jest iloczyn skalarny dwóch wektorów tej samej długości – jest to suma iloczynów odpowiadających współrzędnych. Dla przykładu, iloczyn skalarny wektorów  $[1, 2, 3]$  i  $[7, 5, -2]$  to  $1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 11$ . Jeśli macierz  $A$  ma tyle kolumn, ile macierz  $B$  ma wierszy, to iloczyn  $A \cdot B$  definiujemy jako macierz, która na miejscu  $(i, j)$ , czyli w  $i$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie ma iloczyn skalarny  $i$ -tego wiersza macierzy  $A$  i  $j$ -tej kolumny macierzy  $B$ . Na przykład w (4) macierz  $A^2$  ma na miejscu  $(1, 2)$  liczbę 6, gdyż jest to iloczyn skalarny 1. wiersza i 2. kolumny macierzy  $A$ .

Inną, dość zaskakującą, cechą ciągów Dolda jest ich związek z macierzami kwadratowymi. Zaczniemy od prostego rachunku na pewnej macierzy  $A$  o wymiarze  $2 \times 2$  i jej kwadracie:

$$(4) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}.$$

Obliczmy teraz  $\text{tr } A^2 - \text{tr } A$ , gdzie „tr” jest śladem macierzy kwadratowej, tzn. sumą elementów leżących na jej głównej przekątnej. W naszym przypadku  $\text{tr } A^2 - \text{tr } A = 13 - 3 = 10 \equiv 0 \pmod{2}$ . Zatem dla ciągu  $(\text{tr } A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  kongruencje Dolda są spełnione dla  $n = 2$ . Okazuje się jednak, że są one prawdziwe dla dowolnej macierzy i dowolnego  $n$ , czyli że ciąg śladów dowolnej macierzy całkowitoliczbowej również jest ciągiem Dolda.

Ten niebanalny fakt, odkrywany wielokrotnie przez różnych autorów, ma liczne konsekwencje. Na przykład dla dowolnej macierzy o wyrazach całkowitych  $A$  i liczby pierwszej  $p$  otrzymujemy:

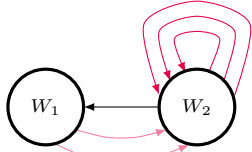
$$\text{tr } A^p \equiv \text{tr } A \pmod{p}.$$

Brzmi jakby znajomo? Rzeczywiście, otrzymaliśmy małe twierdzenie Fermata, tylko w bardziej ogólnej wersji – dla macierzy (zauważmy, że staje się ono dokładnie tym twierdzeniem dla macierzy  $1 \times 1$ ).

Można podać bezpośredni dowód faktu, że  $(\text{tr } A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem Dolda, ale przekraczałoby to ramy tego artykułu (dowód taki znaleźć można w [4]). Możliwy jest jednak

zręczny zabieg (dla macierzy o nieujemnych współczynnikach), który uzasadnia ten fakt na podstawie zdobytej już przez nas wiedzy. Pokażemy mianowicie, że  $(\text{tr } A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem liczby punktów stałych iteracji pewnego odwzorowania.

Dla danej macierzy  $A$  o wymiarze  $s \times s$  i współczynnikach będących liczbami całkowitymi nieujemnymi rozważmy graf skierowany  $G_A$  o  $s$  wierzchołkach, w którym dozwolone są krawędzie wielokrotne, taki że z  $i$ -tego wierzchołka do  $j$ -tego wierzchołka prowadzi dokładnie  $A[i, j]$  krawędzi (przez  $A[i, j]$  oznaczamy liczbę na  $(i, j)$ -tym miejscu macierzy  $A$ ).



Graf skierowany  $G_A$  o dwóch wierzchołkach, odpowiadający macierzy  $A$  danej przez równanie (4)

W opisanym przez nas przykładzie macierzy  $A$  z równania (4) potrzebujemy dwóch wierzchołków, powiedzmy  $W_1$  oraz  $W_2$ . Z  $W_1$  nie ma połączeń do  $W_1$ , ale z  $W_2$  do  $W_2$  wiodą trzy krawędzie. Ponadto z  $W_1$  do  $W_2$  mamy 2 krawędzie, a w przeciwnym kierunku jest 1 krawędź.

Wracając do ogólnego przypadku, łatwo udowodnić indukcyjnie, że  $A^n[i, j]$  (tzn. zawartość komórki  $(i, j)$  macierzy  $A^n$ ) to liczba ścieżek długości  $n$  (z dozwolonym powtarzaniem się krawędzi) prowadzących z wierzchołka  $i$  do wierzchołka  $j$ , mających długość  $n$ . Rzeczywiście, dla  $n = 1$  korzystamy z definicji macierzy  $A$ , natomiast dla  $n > 1$  zauważamy, że ścieżki długości  $n$  od wierzchołka  $i$  do wierzchołka  $j$  możemy podzielić na  $n$  grup: w  $k$ -tej grupie są ścieżki, których „przedostatni przystanek” to wierzchołek  $k$ . Każdą taką ścieżkę możemy otrzymać, biorąc dowolną ścieżkę długości  $n - 1$  z  $i$  do  $k$  (tych jest  $A^{n-1}[i, k]$ ) oraz dowolną krawędź z  $k$  do  $j$  (których jest  $A[k, j]$ ). Zatem w  $k$ -tej grupie mamy  $A^{n-1}[i, k] \cdot A[k, j]$  ścieżek, więc w sumie jest ich  $\sum_{k=1}^n A^{n-1}[i, k] \cdot A[k, j]$ , co zgodnie z definicją mnożenia macierzy jest równe  $(A^{n-1} \cdot A)[i, j]$ , czyli  $A^n[i, j]$ . Stąd ślad macierzy  $A^n$ , czyli suma wyrazów  $A^n[i, i]$ , będzie po prostu liczbą ścieżek długości  $n$  rozpoczynających i kończących się w tym samym wierzchołku.

Ustaliwszy ten fakt, możemy teraz łatwo skonstruować żądane odwzorowanie. Rozpatrzmy przestrzeń  $X$  składającą się z nieskończonych ścieżek w grafie  $G_A$ , reprezentowanych jako ciągi krawędzi  $(k_0, k_1, k_2, \dots)$  i odwzorowanie  $\sigma : X \rightarrow X$  dane wzorem  $\sigma(k_0, k_1, k_2, \dots) = (k_1, k_2, \dots)$ , które można interpretować jako przejście z jednej krawędzi do połączonej z nią kolejnej krawędzi w grafie  $G_A$ .

Punkty stałe  $\sigma$  to ścieżki wykorzystujące tylko jedną krawędź-pętlę, jak np.  $(k_{W_2}, k_{W_2}, k_{W_2}, \dots)$  w naszym przykładzie, gdzie  $k_{W_2}$  oznacza jedną z krawędzi z  $W_2$  do  $W_2$ . Liczba takich nieskończonych ścieżek wychodzących z danego wierzchołka o indeksie  $i$  jest zatem równa  $A[i, i]$ , więc wszystkich takich ścieżek jest  $\text{tr } A$ . Analogicznie, punkty stałe  $\sigma^n$  to ścieżki, które przechodzą na siebie w  $n$ -tej iteracji. Oznacza to, że składają się one z powtórzeń pewnego cyklu długości  $n$ , ale tych jest, jak pokazaliśmy, dokładnie  $\text{tr } A^n$ . Ostatecznie **Fix**  $\sigma^n = \text{tr } A^n$ , zatem  $(\text{tr } A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  jako ciąg liczby punktów stałych odwzorowania  $\sigma$  jest rzeczywiście ciągiem Dolda.

Ciągi Dolda, ze względu na opisane powyżej związki z punktami periodycznymi, stanowią obiecujący obiekt badań na pograniczu teorii układów dynamicznych, topologii i teorii liczb. Definicję ciągów Dolda można uogólnić na różne sposoby. Jedną z takich prób jest rozpatrywanie ciągów wieloindeksowanych. Okazuje się, że mają one podobne właściwości do ciągów klasycznych, a ich opis podany został w pracy nagrodzonej brązowym medalem w Konkursie Prac Uczniowskich im. Pawła Domańskiego (2019) [3].

Na koniec ciekawy problem, niejako odwrotny do rozpatrywanego na początku artykułu. Czy dowolny ciąg Dolda  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  składający się z nieujemnych liczb całkowitych da się przedstawić jako ciąg liczby punktów stałych pewnego odwzorowania  $f : X \rightarrow X$ ? Łatwo jest odpowiedzieć na to pytanie twierdząco, jeśli nic nie zakładamy o odwzorowaniu  $f$  ani o przestrzeni  $X$ . Problem staje się jednak otwarty, jeśli zażądamy dodatkowych warunków, np. założymy, że  $X$  jest rozmaitością, a  $f$  jest gładkie. O szczegółach związanych z tym zagadnieniem, jak również o wykorzystaniu ciągów Dolda w różnych obszarach matematyki poczytać można w [1].

#### Literatura

- [1] J. Byszewski, G. Graff and T. Ward, *Dold sequences, periodic points, and dynamics*, Bull. London Math. Soc. (2021), 1–36, doi:10.1112/blms.12531.
- [2] A. Leśniak, *O pewnym uogólnieniu Małego Twierdzenia Fermata,  $\Delta_{15}^{10}$* .
- [3] M. Scharmach, *Dwuwymiarowe Ciągi Dolda*, dostępne na deltam.
- [4] W. Marzantowicz, P. Nowak-Przygodzki, *Finding periodic points of a map by use of a  $k$ -adic expansion*, Discrete Contin. Dynam. Systems 5 (1999), no. 3, 495–514.

