sposobów? Oznaczmy tę liczbę przez $S(n)$. Widać, że $S(0) = 1, S(1) = 2$. W tym drugim przypadku albo bierzemy jedynego pluszaka, i to jest jeden sposób, albo nie bierzemy. A co dla większych n? Widać, że dla $n \geqslant 2$ albo weźmiemy pierwszego z lewej pluszaka, i wtedy nie wolno nam wziąć drugiego, zatem z pierwszym pluszakiem mamy $S(n-2)$ sposobów, albo nie weźmiemy go, i wtedy pluszaki możemy brać dowolnie spośród pozostałych $n-1$, więc będzie sposobów $S(n-1)$. Łącznie $S(n-2) + S(n-1)$, a to jest przecież rekurencja ciągu Fibonacciego, który ma tylko inny początek. Mamy zatem zależność $S(n) = F_{n+2}$ i udowodniony wzór*

$$S(n) = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} \binom{n-k+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{\lfloor n/2 \rfloor + 1}{\lceil n/2 \rceil} = F_{n+2}.$$

*Dla rzeczywistego x symbol $\lceil x \rceil$ oznacza „sufit z x", czyli zaokrąglenie w górę do najbliższej liczby całkowitej, zaś $\lfloor x \rfloor$ oznacza „podłogę z x", czyli obcięcie do najbliższej liczby całkowitej. Korzystamy tu z oczywistej równości $n - \lceil n/2 \rceil = \lfloor n/2 \rfloor$.

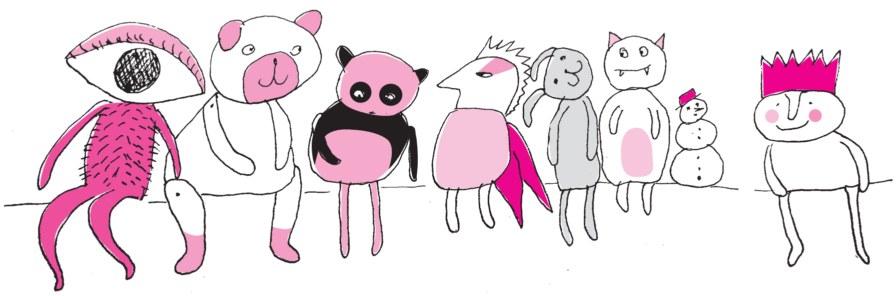
Ostatni wzór można zapisać w prostszej formie:

$$\sum_k \binom{n-k}{k} = F_{n+1},$$

gdzie sumowanie rozciąga się po wszystkich liczbach całkowitych i tylko dla pewnej skończonej liczby indeksów składniki sumy są różne od zera. W oryginalnym trójkącie Pascala wartości wchodzące w skład powyższej sumy są jakby pochylone... Ukłon Pascala w kierunku Fibonacciego.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	10	20	15	6	1	

1 1 2 3 5 8 13



Przygotował Dominik BUREK

Zadania

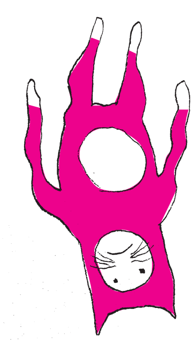
M 1696. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b oraz n, że

$$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2?$$

Rozwiązanie na str. 2

M 1697. Pokazać, że każdą liczbę całkowitą dodatnią można zapisać jako różnicę dwóch liczb całkowitych dodatnich, które mają taką samą liczbę dzielników pierwszych, np. $2 = 12 - 10$.
Rozwiązanie na str. 17

M 1698. Rozstrzygnąć, czy sześcian o krawędzi 100 można podzielić na prostopadłościany o wymiarach $1 \times 1 \times 51$ i $1 \times 1 \times 53$.
Rozwiązanie na str. 17



Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1039. Filmowcy amatorzy postanowili wzbogacić swój film o scenę katastrofy kolejowej, w której pociąg spada z wysokiego mostu. Dysponują jednak jedynie dokładnym modelem pociągu w skali $1 : k$ oraz potrafią zbudować, w tej samej skali, makietę mostu i okolicznych gór. Ile klatek na sekundę powinna rejestrować ich kamera, żeby film odtwarzany standardowym projektorem, wyświetlającym $f = 24$ klatki filmu na sekundę, realistycznie przedstawiał ruch spadającego pociągu?
Rozwiązanie na str. 4

F 1040. Suche powietrze to w 78% azot, 21% tlen i w około 1% argon. Ile wynosi stosunek gęstości powietrza suchego i mokrego w temperaturze 20°C pod standardowym ciśnieniem atmosferycznym $p \approx 10^5$ Pa? Przyjmij, że para wodna zawarta w mokrym powietrzu jest parą nasyconą. W temperaturze 20°C ciśnienie pary nasyconej wody wynosi $p_p \approx 2{,}3 \cdot 10^3$ Pa. Dane dotyczące mas atomowych i cząsteczkowych należy znaleźć w powszechnie dostępnych źródłach.
Rozwiązanie na str. 4