Pascal kłania się Fibonacciemu

*Piotr CHRZĄSTOWSKI-WACHTEL**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Kiedy Blaise Pascal odkrywał właściwości „swojego” trójkąta, nie nazywał go oczywiście „trójkątem Pascala”. W dziele *Traité de triangle arithmétique* udowodnił 13 faktów o tym zadziwiającym obiekcie, przy okazji wprowadzając dwa niezwykle ważne dla matematyki pojęcia. Po pierwsze używał indukcji matematycznej jako metody dowodu, bodaj jako pierwszy w historii. Można go zatem uznać za odkrywcę tej bezcennej metody dowodzenia. Po drugie pokazał, że liczba podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego znajduje się w n-tym wierszu i k-tej kolumnie tego trójkąta. To drugie spostrzeżenie było podstawą powstającej w jego głowie teorii, o czym pisał w listach wymienianych z Pierrem Fermatem, którą historycy matematyki uznają za początek rachunku prawdopodobieństwa.

Trójkąt Pascala powstaje, gdy na nieskończonej planszy, podzielonej na kwadraty wypełnione zerami, w jednym z pól wpiszemy jedynkę. Ta jedynka będzie stanowić lewy-górny róg tabeli, którą utworzymy, wypełniając ją w dół i w prawo według następującej zasady. Każde pole musi być sumą dwóch elementów: tego, który stoi nad nim, oraz jego lewego sąsiada. Ta pierwsza jedynka jest w wierszu zerowym i kolumnie zerowej. Numery wierszy rosną w dół, a kolumn w prawo. Możemy przyjąć, że kolumny na lewo od tej jedynki numerujemy liczbami ujemnymi, tak samo jak wiersze powyżej niej. Jeśli oznaczymy przez $C(n,k)$ zawartość k-tej kolumny w n-tym wierszu, to $C(n,k)=0$, jeśli $k<0$ lub $n<0$ lub $k>n$. Dodatkowo z definicji $C(0,0)=1$, a dla pozostałych wartości n,k (czyli $n>0, 0\leqslant k \leqslant n$) zachodzi związek:

$$(\star) \qquad C(n,k)=C(n-1,k-1)+C(n-1,k).$$

	...	k	...
...			
	$\oplus$	$\oplus$	
n		$=$	
...			

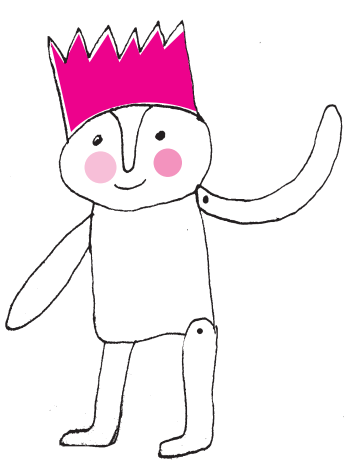
Schemat dodawania w trójkącie Pascala

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	
2	1	2	1	0	0	0	
3	1	3	3	1	0	0	
4	1	4	6	4	1	0	
5	1	5	10	10	5	1	
...							

Tab. 1

Tabela wartości $C(n,k)$ tworzy trójkąt Pascala (tab. 1). Pascal zaobserwował, że w n-tym wierszu i k-tej kolumnie tabeli musi pojawić się liczba wyborów k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, oznaczana zwyczajowo jako $\binom{n}{k}$. Zaczął od $C(n,0)=1$ – pusty zbiór możemy wybrać na jeden sposób. Dla $n>0, k>0$ przeprowadził następujące rozumowanie. Nasz zbiór jest niepusty, więc ma przynajmniej jeden element, nazwijmy go a. Wtedy w tworzonym k-elementowym podzbiorze albo a się znajduje, i wtedy pozostałych $k-1$ elementach wybieramy na $C(n-1,k-1)$ sposobów, albo a w nim nie ma, a wtedy taki k-elementowy podzbiór musimy utworzyć z pozostałych $n-1$ elementach, a tych jest $C(n-1,k)$, co kończy uzasadnienie równości $C(n,k)=\binom{n}{k}$.

Do trójkąta Pascala jeszcze wrócimy, a tymczasem zmienimy delikatnie temat. Na maturze rozszerzonej w roku 2018 pojawiło się zadanie, które sprawiło kłopot wielu maturzystom. Zadanie to sprowadzało się do wyznaczenia liczby możliwych ustawień trzech zer i pięciu jedynek w ciąg tak, aby żadne dwa zera nie sąsiadowały ze sobą. Pierwsze rozwiązania, które pojawiły się w Internecie, były dość siermiężne: bazowały na żmudnym przeliczaniu wszystkich przypadków – gdy pierwsze zero jest na pierwszej pozycji od lewej, gdy jest na drugiej pozycji od lewej itd. Takie rozwiązanie nie zadowalało ambitnych uczniów: nie pokazywało istoty rozwiązania i nie uogólniało się dla większych liczb zer i jedynek.



Spróbujmy rozwiązać to zadanie w sposób systematyczny, a przy okazji poznamy siłę pewnej metody, która zaskakuje swoją uniwersalnością. Podejście to charakteryzuje się następującym sposobem myślenia. Jeśli nie wiesz, jak rozwiązać dane zadanie kombinatoryczne dla konkretnych danych, uogólnij je i zastanów się nad dwoma pytaniami:

- Czy potrafisz to zadanie rozwiązać dla małych wartości danych?
- Czy potrafisz z rozwiązań dla mniejszych wartości wygenerować wzór dla większych?

Jeśli odpowiedź na oba pytania jest pozytywna, to w zasadzie masz już gotowy algorytm postępowania. Algorytm ten za pomocą odpowiednich technik

Rozwiązanie zadania M 1696.
Załóżmy, że takie liczby całkowite dodatnie a, b i n istnieją. Ponieważ $b \geqslant a+1$, to
$$n^2 < a^3 < (a+1)^3 < (n+1)^2.$$
Ponadto
$$n^2 < a^3 < a^4,$$
więc $n < a^2$. Wobec tego
$$(a+1)^3 > a^3 + 3a^2 + 1 >$$
$$> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$
co prowadzi do sprzeczności.

algebraicznych można często przekuć w ogólny wzór, co zresztą spróbujemy w tym przypadku zrobić. Metoda ta, zwana rekurencyjną, jest zaskakująco skuteczna, a techniki rozwiązywania równań rekurencyjnych to fascynujący fragment algebry.

Może, żeby nam się sympatyczniej rozmawiało, przeformułujmy trochę nasze zadanie. Na półce mamy n pluszaków posadzonych rzędem, jeden obok drugiego. Na ile sposobów można wybrać spośród nich k pluszaków tak, aby żadne wybrane pluszaki nie były sąsiadami? Jeśli każdego wybranego pluszaka oznaczymy przez 0, a każdego niewybranego przez 1, to dla $n = 8$ i $k = 3$ otrzymamy nasze maturalne zadanie.

Oznaczmy przez $T(n,k)$ liczbę możliwych wyborów k niesąsiadujących pluszaków spośród n. Pierwsza obserwacja: k nie może być zbyt duże, żeby istniał choć jeden wybór; nie może przekraczać $\frac{n+1}{2}$. Druga: żaden ze znanych szkolnych schematów kombinatorycznych raczej nie pasuje.

Z małymi k nie ma kłopotów. Zero pluszaków można wziąć na jeden sposób: niczego nie brać. To działa nawet dla $n = 0$, czyli dla dowolnego $n \geqslant 0$ mamy $T(n,0) = 1$. Podobnie szybko dojdziemy do wniosku, że dla $k = 1$ i $n > 0$ zachodzi $T(n,1) = n$. Kłopot zaczyna się dla $k > 1$, gdyż tam pojawia się niewygoda z sąsiadami, których brać nie wolno. Jeśli $n \geqslant 2$ i $k > 1$, to możemy dostać w miarę prosty wzór rekurencyjny. Zauważmy, że albo weźmiemy pierwszego pluszaka, albo nie. Jeśli weźmiemy, to musimy pozostałych $k-1$ pluszaków wziąć spośród $n-2$ pozostałych, bo drugi pluszak jest sąsiadem pierwszego, a takich wyborów jest $T(n-2,k-1)$. Z kolei, jeśli nie zdecydujemy się na pierwszego pluszaka, to k pluszaków musimy wziąć spośród pozostałych $n-1$, a takich wyborów jest $T(n-1,k)$. Mamy więc równanie rekurencyjne:
$$T(n,0) = 1; \quad T(1,1) = 1; \quad T(n,k) = 0 \text{ dla } k > \tfrac{n+1}{2};$$
$$T(n,k) = T(n-2,k-1) + T(n-1,k) \quad \text{ dla } n \geqslant 2, k \geqslant 1.$$

	...	k	...
...			
	$\oplus$		
		$\oplus$	
n		$=$	
...			

Schemat dodawania w tabeli T

To równanie jest bardzo podobne do równania $(\star)$, definiującego trójkąt Pascala. W trójkącie Pascala, aby otrzymać w danej komórce wartość, dodajemy to, co jest nad nią, do tego, co jest ukosem po lewej. W przypadku pluszaków do tego, co jest nad nią, dodajemy wartość o dwa wiersze wyżej i jedną kolumnę w lewo – taki ruch jak konika szachowego. Jeśli wypiszemy wartość dla T, to zauważymy, że faktycznie dostajemy liczby występujące w trójkącie Pascala, tylko zapisane przekątnymi (tab. 2).

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	...
0	1					
1	1	1				
2	1	2				
3	1	3	1			
4	1	4	3			
5	1	5	6	1		
6	1	6	10	4		
7	1	7	15	10	1	
		⋱	⋱	⋱	⋱	

Tab. 2

Mamy zatem $T(n,k) = C(n-k+1,k)$. Dowód tego jest natychmiastowy przez zauważenie odpowiedniości równań rekurencyjnych definiujących te dwie wartości. Czy można jakoś intuicyjnie wytłumaczyć ten w miarę prosty wynik?

Zauważmy, że możemy odwrócić sytuację: Zamiast zabierać k pluszaków spośród n, możemy przyjrzeć się, które pluszaki zostały. Każdego brakującego pluszaka mógłby zgłosić jego prawy sąsiad. No może nie każdego, bo skrajnie prawy pluszak nie ma prawego sąsiada. Dołączmy zatem do naszej pluszowej kolekcji dodatkowego pluszaka (to jest ta jedynka z wyrażenia $n-k+1$). Robimy teraz tak: usuwamy k pluszaków, a następnie pytamy, które k spośród $n-k+1$ tych, które pozostały, chcą wstawić sobie jednego lewego sąsiada. Każdemu wyborowi takich k odpowiada dokładnie jedno z rozwiązań zadania tworzących łącznie $T(n,k)$ możliwości. A takich wyborów jest oczywiście $\binom{n-k+1}{k}$.

Przy okazji zauważmy, że jeśli przyjrzymy się górze tabeli dla $T(n,k)$, to dostrzeżemy, że (zachowując rekurencyjną zależność) można wręcz zacząć wiersz wyżej, od $n = -1$, z wartością początkową $T(-1,0) = 1$. Wtedy wzięcie zera pluszaków z półki, na której jest -1 pluszaków, też można by było wykonać na 1 sposób. No, może nie tak zupełnie serio, ale formalnie wszystko się zgadza. Zauważmy też, że jeśli na półce są -2 pluszaki lub mniej, to nie uda się nam już wziąć zera pluszaków.

Dobrze, ale co z tytułowym ukłonem Pascala w stronę Fibonacciego? I gdzie w tym wszystkim nasze zadanie? Zanim odpowiemy na te pytania, przypomnijmy, że ciąg Fibonacciego to ciąg $(F_n)_{n\geqslant 0}$, w którym $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ oraz $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Wysumujmy teraz wartości znajdujące się w wierszach tabeli T. Okaże się, że dostaniemy kolejno $1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots$, czyli kolejne liczby Fibonacciego, poczynając od F_2. Oczywiście moglibyśmy udowodnić indukcyjnie ten niespodziewany fakt, bawiąc się z symbolami dwumianowymi. Przedstawimy jednak dowód kombinatoryczny. Co to jest suma n-tego wiersza w tabeli T? Po prostu liczba sposobów, na które można z półki z n pluszakami wziąć pewną ich liczbę tak, aby nie brać sąsiadów. Ile jest takich sposobów? Oznaczmy tę liczbę przez $S(n)$. Widać, że $S(0) = 1, S(1) = 2$. W tym drugim przypadku albo bierzemy jedynego pluszaka, i to jest jeden sposób, albo nie bierzemy. A co dla większych n? Widać, że dla $n \geqslant 2$ albo weźmiemy pierwszego z lewej pluszaka, i wtedy nie wolno nam wziąć drugiego, zatem z pierwszym pluszakiem mamy $S(n-2)$ sposobów, albo nie weźmiemy go, i wtedy pluszaki możemy brać dowolnie spośród pozostałych $n-1$, więc będzie sposobów $S(n-1)$. Łącznie $S(n-2) + S(n-1)$, a to jest przecież rekurencja ciągu Fibonacciego, który ma tylko inny początek. Mamy zatem zależność $S(n) = F_{n+2}$ i udowodniony wzór*

*Dla rzeczywistego x symbol $\lceil x \rceil$ oznacza „sufit z x", czyli zaokrąglenie w górę do najbliższej liczby całkowitej, zaś $\lfloor x \rfloor$ oznacza „podłogę z x", czyli obcięcie do najbliższej liczby całkowitej. Korzystamy tu z oczywistej równości $n - \lceil n/2 \rceil = \lfloor n/2 \rfloor$.

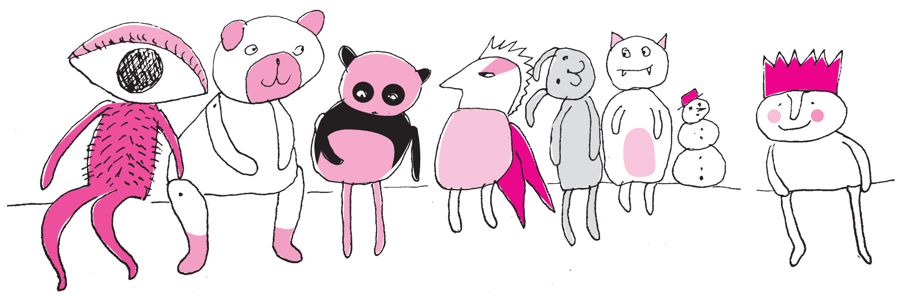
$$S(n) = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} \binom{n-k+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{\lfloor n/2 \rfloor + 1}{\lceil n/2 \rceil} = F_{n+2}.$$

Ostatni wzór można zapisać w prostszej formie:

$$\sum_k \binom{n-k}{k} = F_{n+1},$$

gdzie sumowanie rozciąga się po wszystkich liczbach całkowitych i tylko dla pewnej skończonej liczby indeksów składniki sumy są różne od zera. W oryginalnym trójkącie Pascala wartości wchodzące w skład powyższej sumy są jakby pochylone... Ukłon Pascala w kierunku Fibonacciego.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1 ^{1}							
1	1 ^{1}	1 ^{2}						
2	1	2 ^{3}	1 ^{5}					
3	1	3	3 ^{8}	1 ^{13}				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	10	20	15	6	1	



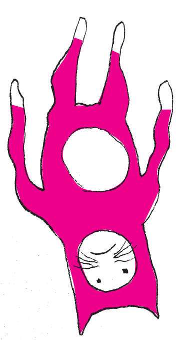
Przygotował Dominik BUREK

Zadania

M 1696. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b oraz n, że
$$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2?$$
Rozwiązanie na str. 2

M 1697. Pokazać, że każdą liczbę całkowitą dodatnią można zapisać jako różnicę dwóch liczb całkowitych dodatnich, które mają taką samą liczbę dzielników pierwszych, np. $2 = 12 - 10$.
Rozwiązanie na str. 17

M 1698. Rozstrzygnąć, czy sześcian o krawędzi 100 można podzielić na prostopadłościany o wymiarach $1 \times 1 \times 51$ i $1 \times 1 \times 53$.
Rozwiązanie na str. 17



Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1039. Filmowcy amatorzy postanowili wzbogacić swój film o scenę katastrofy kolejowej, w której pociąg spada z wysokiego mostu. Dysponują jednak jedynie dokładnym modelem pociągu w skali $1 : k$ oraz potrafią zbudować, w tej samej skali, makietę mostu i okolicznych gór. Ile klatek na sekundę powinna rejestrować ich kamera, żeby film odtwarzany standardowym projektorem, wyświetlającym $f = 24$ klatki filmu na sekundę, realistycznie przedstawiał ruch spadającego pociągu?
Rozwiązanie na str. 4

F 1040. Suche powietrze to w 78% azot, 21% tlen i w około 1% argon. Ile wynosi stosunek gęstości powietrza suchego i mokrego w temperaturze 20°C pod standardowym ciśnieniem atmosferycznym $p \approx 10^5$ Pa? Przyjmij, że para wodna zawarta w mokrym powietrzu jest parą nasyconą. W temperaturze 20°C ciśnienie pary nasyconej wody wynosi $p_p \approx 2{,}3 \cdot 10^3$ Pa. Dane dotyczące mas atomowych i cząsteczkowych należy znaleźć w powszechnie dostępnych źródłach.
Rozwiązanie na str. 4