KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 37

Na tropie wielomianów – część 1

Bartłomiej BZDĘGA

Zajmiemy się zadaniami polegającymi na znajdywaniu wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, spełniających dane równości. A oto kilka pomocnych faktów i wskazówek:

1. Stopień wielomianu. Niech $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ oraz $Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$, przy czym $a_n, b_m \neq 0$ oraz $n \geqslant m \geqslant 0$. Przez $\deg W$ oznaczmy stopień wielomianu W (przyjmuje się, że stopień wielomianu zerowego jest równy $-\infty$); mamy tu zatem $\deg P = n$ i $\deg Q = m$. Wówczas

$$\deg\big(P(x) + Q(x)\big) \leqslant n, \qquad \deg\big(P(x)Q(x)\big) = m + n, \qquad \deg\big(P(Q(x))\big) = mn,$$

przy czym nierówność ostra ma miejsce tylko wtedy, gdy $n = m$ i $a_m + b_m = 0$. Dowód opiera się na następujących równościach:

$$P(x)+Q(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\ldots+(a_m+b_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}+\ldots+a_nx^n,$$

$$P(x)Q(x) = (a_0b_0)+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots+(a_nb_m)x^{n+m},$$

$$P(Q(x)) = a_0+a_1Q(x)+a_2Q(x)^2+\ldots+a_nQ(x)^n.$$

Równe wielomiany mają równe stopnie – zawsze więc warto wyznaczyć lub oszacować stopnie wielomianów po obu stronach równości z zadania i je przyrównać. Jeśli obie strony równości są sumami, najlepsze efekty daje przeniesienie składnika (składników) o najwyższym stopniu na jedną stronę równości, a pozostałych – na drugą.

2. Badanie najstarszych współczynników. Niezerowy wielomian $P(x)$ stopnia n możemy zapisać w postaci $P(x) = ax^n + Q(x)$, w której $a \neq 0$ i $\deg Q < n$. Po podstawieniu tego do zadanego równania mamy spore szanse na wyznaczenie a i dalej rozwiązujemy równanie, być może łatwiejsze od wyjściowego, w którym niewiadomą jest wielomian Q. Często prowadzi ono do $Q(x) = 0$ dzięki własnościom stopnia wielomianu opisanym w punkcie 1. Jeśli $Q(x) \neq 0$, możemy pójść dalej i podstawić $Q(x) = bx^m + R(x)$, przy czym $\deg R < m < n$ i $b \neq 0$. Można tak wiele razy, ale jeśli nie widać efektów, trzeba spróbować inaczej. Można też od razu podstawić $P(x) = ax^n + bx^m + R(x)$.

3. Część parzysta i część nieparzysta. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Poszukamy takiej funkcji parzystej $f_{\mathtt{P}}$ i takiej funkcji nieparzystej $f_{\mathtt{N}}$, że $f(x) = f_{\mathtt{P}}(x) + f_{\mathtt{N}}(x)$. Wtedy $f(-x) = f_{\mathtt{P}}(-x) + f_{\mathtt{N}}(-x) = f_{\mathtt{P}}(x) - f_{\mathtt{N}}(x)$, problem sprowadza się zatem do rozwiązania układu dwóch równań z niewiadomymi $f_{\mathtt{P}}(x)$ i $f_{\mathtt{N}}(x)$. Jego jedynym rozwiązaniem jest

$$f_{\mathtt{P}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad f_{\mathtt{N}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Z tego wynika, że każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci sumy funkcji parzystej i funkcji nieparzystej. Nazywamy je odpowiednio *częścią parzystą* i *częścią nieparzystą* funkcji f. Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że iloczyn funkcji parzystej i nieparzystej jest funkcją nieparzystą, a iloczyn dwóch funkcji parzystych lub dwóch nieparzystych – parzystą; ponadto dla parzystej funkcji $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja $f(p(x))$ jest parzysta. W przypadku funkcji wielomianowej $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ mamy

$$P_{\mathtt{P}}(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots, \qquad P_{\mathtt{N}}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \ldots$$

Pomysł polega na podstawieniu do zadanego równania $P(x) = P_{\mathtt{P}}(x) + P_{\mathtt{N}}(x)$, a następnie porównania części parzystych i nieparzystych obu stron równości.

Zadania. *Wyznaczyć wszystkie wielomiany/pary wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, które dla każdego rzeczywistego x spełniają daną równość/dane równości.*

1. $P(x^3) = x^2P(x^2) + x^2 - 1$.
2. $P(x^3) = P(x)^3$.
3. $P(x)^2 - P(x^2) = 2x^{37}$.
4. $P(x^2)P(x^3) = P(x^5)$.
5. $P(x)P(4x) = P(2x)^2$.
6. $P(x^2 + 1) = Q(x)^2 + 2x, \qquad Q(x^2 + 1) = P(x)^2$.

Wskazówki do zadań

1. Stopień wyrażenia po lewej stronie równości wynosi $3n$, a po prawej $2n + 2$. Z tego wynika, że $n = 2$ (lub $n = -\infty$, ale $P(x) = 0$ nie spełnia równania), więc $P(x) = ax^2 + bx + c$ dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wstawiając to do równania z zadania, otrzymamy $c = -1$, $b = 0$, natomiast a może być dowolne.

2. Podstawmy $P(x) = ax^n + Q(x)$, przy czym $a \neq 0$ i $\deg Q < n$. Otrzymamy równość, z której wyniknie, że $a = a^3$ (współczynniki przy x^{3n}). Odejmijmy obustronnie $ax^{3n} = a^3x^{3n}$. Jeśli $\deg(Q) = m \geqslant 0$, to po lewej stronie równości mamy wielomian stopnia $3m$, a po prawej stopnia $2n + m > 3m$ – sprzeczność. Z tego wynika, że Q jest wielomianem zerowym.

3. Po podstawieniu $P(x) = P_{\mathtt{P}}(x) + P_{\mathtt{N}}(x)$ porównanie części nieparzystych po obu stronach daje $P_{\mathtt{P}}(x) = ax^{2n}$ i $P_{\mathtt{N}}(x) = \frac{1}{a}x^{37-2n}$ dla pewnego $n \in \{0, 1, \ldots, 18\}$ oraz $a \neq 0$. Dalej, po porównaniu części parzystych, otrzymamy $a = 1$.

4. Podstawmy $P(x) = ax^n + Q(x)$, przy czym $a \neq 0$ i $\deg Q < n$. Przypuśćmy, że $m = \deg Q \geqslant 0$. Otrzymamy $a = 1$, a po obustronnym odjęciu x^{5n} dostaniemy równość, w której lewa strona jest wielomianem stopnia $3n + 2m$, a prawa stopnia $5m < 3n + 2m$ – sprzeczność.

5. Przypuśćmy, że wielomian P ma co najmniej dwa niezerowe współczynniki. Podstawmy $P(x) = ax^n + bx^m + R(x)$ dla pewnych $a, b \neq 0$ i $m < n < \deg R$. Po obustronnym odjęciu $4^na^2x^{2n}$ otrzymamy po obu stronach równości wielomiany stopnia $m + n$, ale ich współczynniki przy x^{m+n} nie są równe. Ta sprzeczność dowodzi, że wielomian P ma co najwyżej jeden niezerowy współczynnik.

6. Podstawmy $Q(x) = Q_{\mathtt{P}}(x) + Q_{\mathtt{N}}(x)$. Po przyrównaniu części nieparzystych obu stron pierwszego równania otrzymamy $Q(x) = cx - \frac{1}{c}$ dla pewnego $c \neq 0$. Z drugiego równania wnioskujemy, że $\deg P = \deg Q = 1$, więc $P(x) = ax + b$ dla pewnych a i b, przy czym $a \neq 0$. Współczynniki a, b i c wyznaczamy przez bezpośrednie podstawienie $Q(x) = cx - \frac{1}{c}$ i $P(x) = ax + b$ do zadanych równań.