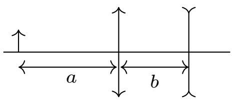
# Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2022

## Zadania z fizyki nr 730, 731

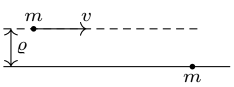
*Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**730.** Dwie soczewki, skupiająca i rozpraszająca, tworzą układ o wspólnej osi optycznej (rys. 1). Odległość między soczewkami $b = 4$ cm. Układ daje rzeczywisty obraz przedmiotu znajdującego się w odległości $a = 6$ cm od soczewki skupiającej. Powiększenie obrazu $P = 4$. Obraz powstał na ekranie umieszczonym w odległości $c = 4$ cm od soczewki rozpraszającej. Znaleźć ogniskowe obu soczewek.




Rys. 1

**731.** Dwa punkty materialne o jednakowych masach $m$ oddziałują ze sobą grawitacyjnie. W chwili początkowej jeden punkt spoczywa, drugi zbliża się do niego z nieskończoności z prędkością $v$, a parametr toru wynosi $\varrho$ (rys. 2). Na jaką najmniejszą odległość zbliżą się te masy?



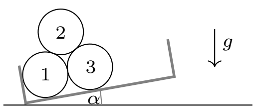

Rys. 2

## Rozwiązania zadań z numeru 9/2021

Przypominamy treść zadań:

**722.** W skrzyni ciężarówki leżą trzy jednakowe bale (rysunek 3). Skrzynia nachylona jest do poziomu pod kątem $\alpha$. Dla jakich wartości kąta $\alpha$ układ bali pozostaje w stanie równowagi? Tarcie zaniedbujemy.

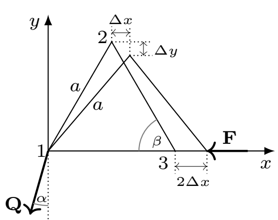
**723.** Cząstka relatywistyczna o masie $m$ i energii kinetycznej $E_k$ zderza się niesprężyście z taką samą cząstką spoczywającą. Znaleźć maksymalną energię $\Delta E$, która może być wykorzystana do wytworzenia nowych cząstek. Rozważyć przybliżenie nierelatywistyczne, gdy $E_k \ll mc^2$, oraz ultrarelatywistyczne, gdy $E_k \gg mc^2$.




Rys. 3

**722.** Maksymalna wartość kąta $\alpha$, dla której możliwy jest stan równowagi, wynosi $\pi/6$. Dla kątów większych prosta, wzdłuż której działa siła ciężkości działająca na górny bal, przechodzi z lewej strony punktu podparcia o niższy lewy bal, i bal górny spadnie.

Rozważmy sytuację, gdy kąt jest mniejszy od wartości minimalnej, dla której możliwy jest stan równowagi. Aby zapobiec rozjechaniu się dolnych bali, podpieramy je siłą $F$ przyłożoną do dolnego prawego bala wzdłuż prostej łączącej środki dolnych bali. Praca tej siły podczas bardzo małego i powolnego przemieszczania prawego dolnego bala równa jest zmianie energii potencjalnej układu, ponieważ tarcie nie występuje. Rysunek 4 (obrócony dla wygody o kąt $\alpha$ zgodnie ze wskazówkami zegara) przedstawia trójkąty łączące środki bali przed i po przemieszczeniu. Na początku trójkąt był równoboczny i oznaczyliśmy długość jego boku przez $a$. Po przemieszczeniu środek górnego bala obniżył się o $\Delta y$ i przesunął w prawo o $\Delta x$, lewy dolny bal pozostał w miejscu, a prawy przesunął się w prawo o $2\Delta x$. Uwzględniając, że siły ciężkości $Q$ na naszym rysunku tworzą z osią $y$ kąt $\alpha$, możemy zapisać zmianę energii potencjalnej w postaci:




Rys. 4

$$\Delta E_p = Q\cos\alpha\cdot\Delta y + Q\sin\alpha\cdot\Delta x + Q\sin\alpha\cdot 2\Delta x.$$

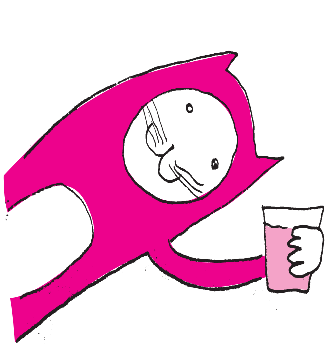
Siła $F$ wykonuje przy tym pracę $\Delta W = -F\cdot 2\Delta x$, stąd

$$-F\cdot 2\Delta x = Q\cos\alpha\cdot\Delta y + 3Q\sin\alpha\cdot\Delta x. \qquad (*)$$

Aby wyznaczyć siłę $F$, musimy znaleźć związek między $\Delta x$ i $\Delta y$. W tym celu wyrazimy je przez zmianę kąta $\beta$. W układzie współrzędnych na rysunku 4 współrzędne wierzchołka trójkąta przed przemieszczeniem są równe $x = a\cos\beta$, $y = a\sin\beta$, stąd dla małych przyrostów $\Delta\beta$ otrzymujemy $\Delta x = a(\cos(\beta+\Delta\beta) - \cos\beta) = -a\sin\beta\Delta\beta$, $\Delta y = a\cos\beta\Delta\beta$. Podstawiając to do $(*)$ i uwzględniając, że $\beta = \pi/3$, otrzymujemy

$$F = Q(\cos\alpha/\sqrt{3} - 3\sin\alpha)/2.$$

Gdy $\operatorname{tg}\alpha < 1/3\sqrt{3}$, to siła $F > 0$, i bale muszą być podtrzymywane. Ostatecznie układ bali pozostanie w równowadze, gdy $1/3\sqrt{3} \leqslant \operatorname{tg}\alpha \leqslant \sqrt{3}/3$.



**723.** Oznaczmy przez $M$ całkowitą masę układu po zderzeniu. Przy danym pędzie układu masa ta jest największa, gdy wszystkie cząstki lecą w tym samym kierunku z tymi samymi prędkościami. Energia, którą można wykorzystać do wytworzenia nowych cząstek, wynosi $\Delta E = Mc^2 - 2mc^2$. Pęd układu przed zderzeniem równy jest pędowi $p_1$ cząstki padającej $p^2 = p_1^2 = E_1^2/c^2 - m^2c^2$, gdzie $E_1$ jest energią cząstki padającej $E_1 = mc^2 + E_k$. Energia $E$ układu przed zderzeniem równa jest energii układu $E'$ po zderzeniu $E = 2mc^2 + E_k = E'$. Oznaczając przez $p'$ pęd układu po zderzeniu, możemy napisać $p'^2 = E'^2/c^2 - M^2c^2 = ((2mc^2 + E_k)/c)^2 - M^2c^2$. Z zasady zachowania pędu $p^2 = p'^2$, zatem $M^2 = 4m^2(1 + E_k/2mc^2)$, $\Delta E = 2mc^2(\sqrt{1 + E_k/2mc^2} - 1)$.

W przypadku nierelatywistycznym $E_k \ll mc^2$ i możemy skorzystać ze wzoru $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$ dla $x \ll 1$. Otrzymujemy wynik $\Delta E = E_k/2$, czyli co najwyżej połowa energii kinetycznej padającej cząstki może zostać zamieniona na energię spoczynkową powstających cząstek. W przypadku ultrarelatywistycznym $E_k \gg mc^2$, stąd $\Delta E = \sqrt{2mc^2E_k}$. Część energii kinetycznej $\Delta E/E_k$, którą można wykorzystać do utworzenia nowych cząstek, maleje wraz ze wzrostem tej energii.

# Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2022

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 823 ($WT = 2{,}55$) i 824 ($WT = 1{,}44$) z numeru 6/2021

| | | |
|---|---|---|
| Łukasz Merta | Kraków | 44,45 |
| Piotr Kumor | Olsztyn | 44,08 |
| Błażej Żmija | Kraków | 40,50 |
| Janusz Olszewski | Warszawa | 39,34 |
| Kacper Morawski | Warszawa | 37,16 |
| Witold Bednarek | Łódź | 36,36 |
| Adam Woryna | Ruda Śl. | 36,14 |
| Paweł Najman | Kraków | 34,25 |

Linię 44p. przekraczają panowie: Łukasz Merta po raz drugi; Piotr Kumor po raz piętnasty.

## Zadania z matematyki nr 833, 834

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**833.** Trzy niewspółliniowe punkty $C$, $E$, $G$ leżą wewnątrz koła ograniczonego okręgiem $\Omega$, który przecina prostą $CE$ w punktach $B, F$; prostą $CG$ – w punktach $A, I$; prostą $EG$ – w punktach $D, H$; oznaczenia ustalone są tak, by na każdej z tych trzech prostych cztery nazwane punkty leżały w porządku alfabetycznym. Trójkąt krzywoliniowy $ABC$ posiada okrąg wpisany, styczny do odcinków $AC$, $BC$ oraz styczny w punkcie $K$ do łuku $AB$ okręgu $\Omega$. Analogicznie, okręgi wpisane w figury $DEF$ i $GHI$ są styczne do okręgu $\Omega$ odpowiednio w punktach $L$ i $M$. Udowodnić, że proste $CK$, $EL$, $GM$ mają punkt wspólny.

**834.** Podać przykład takiego nieskończonego rosnącego ciągu liczb naturalnych $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, że dla każdego $n \geqslant 1$ suma

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{L_n}{M_n},$$

zapisana w postaci ułamka nieskracalnego $L_n/M_n$, ma w liczniku liczbę $L_n$ podzielną przez $n$. Dla znalezionego ciągu $(a_n)$ obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(1/a_n)$ lub oszacować ją z dołu; to znaczy, wskazać dowolną liczbę $D$, nie przekraczającą owej sumy. Im większa wartość $D$, tym wyższa ocena.

Zadanie 834 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Tomasz Ordowski.

## Rozwiązania zadań z numeru 9/2021

Przypominamy treść zadań:

**825.** Dany jest graf ważony $G$ mający $n$ wierzchołków; $n \geqslant 4$. Każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź (niezorientowana). Każdej krawędzi przyporządkowana jest jej *waga*: liczba rzeczywista różna od zera. Określamy *mignięcie* wierzchołkiem jako jednoczesną zmianę znaku wszystkich krawędzi wychodzących z tego wierzchołka.

Zakładamy, że zarówno w grafie $G$, jak i w każdym grafie ważonym, uzyskanym z $G$ przez jednokrotne lub dwukrotne wykonanie operacji mignięcia (na dowolnie wybranym wierzchołku/wierzchołkach) suma wag wszystkich krawędzi grafu jest liczbą o module 1. Wyznaczyć zbiór wartości, jakie może mieć iloczyn wag wszystkich krawędzi grafu $G$.

**826.** Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg o średnicy $AB$. Styczne do okręgu w punktach $A$ i $D$ przecinają się w punkcie $F$. Boki $BC$ i $CD$ są jednakowej długości; zaś przekątna $CE$ połowi przekątną $AD$. Dowieść, że proste $CE$ i $EF$ są prostopadłe.

**825.** Określamy *walor* wierzchołka jako sumę wag wychodzących z niego krawędzi. Jeżeli suma wag wszystkich krawędzi grafu $G$ wynosi $s$ ($s \in \{1, -1\}$), to suma walorów wszystkich wierzchołków wynosi $2s$. Mignięcie wierzchołkiem, który ma walor $t$, powoduje zmianę sumy wag krawędzi z $s$ na $s - 2t$. Ta nowa suma ma (z założenia) znów być równa $s$ lub $-s$. Wobec tego $t = 0$ lub $t = s$. Tak więc każdy wierzchołek ma walor 0 lub $s$. Suma wszystkich walorów to $2s$. Zatem dokładnie dwa wierzchołki – nazwijmy je: *czerwone* – mają walor $s$; pozostałe – *zielone* – mają walor 0.

Dzięki założeniu o „dwukrotnym mignięciu” można to samo rozumowanie odnieść do grafu uzyskanego w wyniku mignięcia dowolnie wybranym wierzchołkiem grafu $G$. Wniosek:

W1. Zarówno w grafie $G$, jak i w każdym grafie powstałym z $G$ przez jednokrotne mignięcie, są dwa wierzchołki czerwone (o jednakowym walorze równym 1 lub $-1$) oraz $n-2$ wierzchołków zielonych (o walorze 0).

Mignięcie dowolnym wierzchołkiem nie zmienia koloru tego wierzchołka (jego walor ulega przemnożeniu przez $-1$). Odnotujmy kilka własności nieco mniej oczywistych:

W2. Każda krawędź wychodząca z wierzchołka zielonego $\mathbf{w}$ (w grafie $G$) ma wagę $\pm 1/2$, zaś mignięcie jej przeciwnym końcem powoduje zmianę koloru wierzchołka $\mathbf{w}$ na czerwony.

Jest tak, bowiem jeśli taka krawędź ma wagę $q$, to mignięcie jej drugim końcem zmienia zerowy walor wierzchołka $\mathbf{w}$ o $2q$; jego nowy walor już nie jest zerowy, więc wynosi $\pm 1$, czyli $\mathbf{w}$ stał się czerwony; $q = \pm 1/2$.

W3. Z wierzchołka czerwonego może wychodzić co najwyżej jedna krawędź do wierzchołka zielonego.

Gdyby bowiem wychodziły dwie, to mignięcie tym czerwonym spowodowałoby (w myśl W2) zaczerwienienie ich zielonych końców; w nowym grafie byłyby już trzy wierzchołki czerwone, co (wobec W1) jest zabronione.

W4. W grafie $G$ jest co najwyżej jedna krawędź o obu końcach zielonych.

Uzasadnienie: w wyniku mignięcia dowolnym końcem krawędzi zielono-zielonej drugi koniec staje się czerwony (W2); w nowym grafie nie może być trzech wierzchołków czerwonych (W1), więc wierzchołek, którym migamy, musi być też połączony z pewnym wierzchołkiem czerwonym (aby zmienić jego kolor). Gdyby istniały dwie krawędzie zielono-zielone, miałyby łącznie co najmniej trzy wierzchołki, a każdy z nich musiałby łączyć się z którymś z dwóch wierzchołków czerwonych. Pewien czerwony byłby połączony z dwoma zielonymi, wbrew W3.

Dla dokończenia rozwiązania rozważymy dwa przypadki. Jeżeli istnieje w grafie $G$ krawędź o obu końcach zielonych i wadze $q$ (W2: $q = \pm 1/2$), to z każdego z tych końców wychodzi krawędź o wadze $-q$ do wierzchołka czerwonego, i to nie tego samego (W3). Jednostkowy walor wierzchołków czerwonych wymusza ich połączenie krawędzią o wadze $-q$; innych krawędzi już nie ma (własności W3, W4) – pozostałe wierzchołki są izolowane. Czworobok krawędzi o wagach $q, -q, -q, -q$ spełnia wymagane warunki. Iloczyn wag wynosi $-q^4$, czyli $-1/16$.

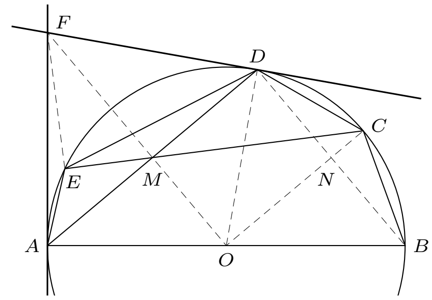
# Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Pozostaje przypadek, gdy w grafie $G$ nie ma krawędzi o obu końcach zielonych. Wtedy wszystkie wierzchołki zielone są izolowane; bowiem gdyby z któregoś wychodziły krawędzie – z konieczności do obu wierzchołków czerwonych, jedna o wadze $-1/2$, druga o wadze $1/2$ – wówczas żadna liczba nie mogłaby być wagą krawędzi łączącej wierzchołki czerwone, dającą każdemu z nich walor $\pm 1$. Tak więc w tym przypadku graf $G$ ma tylko jedną krawędź, o końcach czerwonych, z wagą 1 lub $-1$.

Stąd odpowiedź: iloczyn, o który pyta zadanie, może mieć jedynie wartości $1, -1, -1/16$.

[Komentarz redaktora Ligi w elektronicznym wydaniu numeru.]

**826.** Z podanych założeń wynika, że środek $M$ odcinka $AD$ leży na prostej $CE$, a środek $N$ odcinka $BD$ leży na prostej $OC$. Czworokąt $MOND$ jest równoległobokiem; skoro kąt $ADB$ jest prosty, jest to prostokąt.

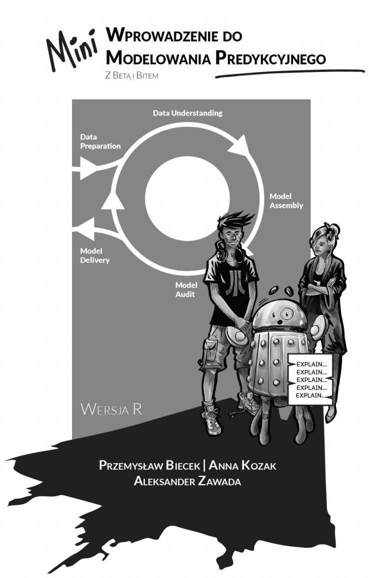



Deltoid $AODF$, z kątami prostymi przy wierzchołkach $A, D$, ma okrąg opisany. W punkcie $M$ przecinają się cięciwy $AD$, $OF$ tego okręgu, jak również cięciwy $AD$, $CE$ okręgu o środku $O$. Stąd $FM \cdot MO = AM \cdot MD = CM \cdot ME$. Dostajemy proporcję $MO/MC = ME/MF$, która uzasadnia podobieństwo trójkątów $MOC$ i $MEF$. Pierwszy z nich ma kąt prosty przy wierzchołku $O$, więc drugi ma kąt prosty przy wierzchołku $E$; czyli $CE \perp EF$, jak należało wykazać.

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.

## Odpowiedź na wielkie pytanie o Uczenie Maszynowe i całą resztę




Elektroniczną wersję książki można odnaleźć na stronie `https://betaandbit.github.io/RML/`

Książka *Mini wprowadzenie do modelowania predykcyjnego* (tytuł oryginału *The Hitchhiker's Guide to Responsible Machine Learning*) autorstwa Przemysława Biecka, Anny Kozak i Aleksandra Zawady jest krótką, lecz pouczającą wycieczką po (jak sam tytuł wskazuje) uczeniu maszynowym. Składają się na nią dwie zręcznie połączone części. Jedna z nich to komiks (świetne rysunki A.Z.) przedstawiający historię rodzeństwa „naukodanowców" (ang. *data scientist*), Bety i Bita (nawiasem pisząc, gościli oni na łamach *Delty* jeszcze jako dzieci, patrz $\Delta^{12}_{16}$ i $\Delta^{02}_{21}$), którzy pod presją czasu muszą wykorzystać swoje analityczne umiejętności, aby wspomóc walkę z rozprzestrzeniającym się po kraju wirusem. Pojawiające się w tej opowieści pojęcia i koncepcje z zakresu uczenia maszynowego są dokładnie wyjaśniane w ramach przeplatanej z komiksem części drugiej, o bardziej podręcznikowym (w pozytywnym tego słowa znaczeniu) charakterze. Zawarto w niej również kody w języku `R`, pozwalające na samodzielne odtworzenie kolejnych etapów analizy wykonywanej przez bohaterów komiksu. Całość obrazowo przybliża skomplikowany proces wnioskowania z danych, a przynajmniej to, jak powinien on przebiegać, jeśli chcemy mieć zaufanie do jego wyników. Warto tu podkreślić, że autorzy są dobrze zaznajomieni nie tylko z teorią, ale i praktyką *data science*, co pozwala wierzyć, że przedstawiona przez nich wizja jest bliska „naukodanowej" codzienności.

Podkreślmy, że w tej eskapadzie nie wymaga się od Czytelnika profesjonalnego, podróżniczego ekwipunku – otwarty umysł oraz solidne matematyczne przygotowanie na poziomie szkoły średniej to z pewnością wszystko, czego potrzeba, aby skorzystać z wyprawy. Nie trzeba chyba dodawać, że nie wystarczy powrócić z takiej wycieczki, aby stać się ekspertem w „data science" – jest to wszak ogromna (i fascynująca) dziedzina, która może być porównana do podróży tysiąca mil. Wiemy jednak doskonale, że takie podróże rozpoczynają się od pierwszego kroku... lub złapania autostopu!

*Ł.R.*