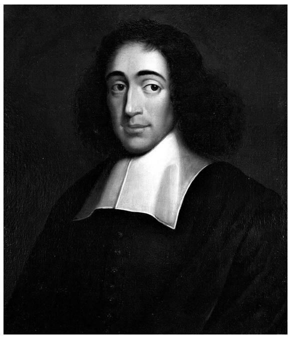
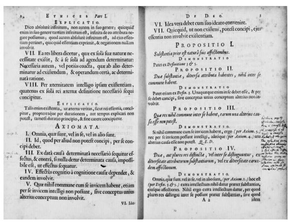
Baruch Spinoza i matematyka

*Grzegorz ŁUKASZEWICZ**

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Baruch Spinoza (1632–1677)



Strona *Etyki*

Związki Spinozy z matematyką są niebanalne, choć sam nigdy nie napisał typowej pracy matematycznej. Matematykę uważał za wzór rozumowania mającego doprowadzić do prawdy, a swoją słynną *Etykę,* czyli *Ethica Ordine Geometrico Demonstrata* (1677), napisał, wzorując się na *Elementach* Euklidesa.

W swoim niedokończonym *Traktacie o doskonaleniu umysłu* przedstawił kolejne poziomy poznania [por. Polya, 1975]. Omówimy je poniżej, odnosząc się do zrozumienia znanej ze szkoły, elementarnej formuły

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{1}$$

na początku w zakresie liczb naturalnych. Następnie będziemy się zaprzyjaźniać z naszą formułą na rozmaite sposoby (przy okazji pokazując mechanizmy odkrywania prawd matematycznych), pogłębiając coraz bardziej poziomy jej zrozumienia.

(I) **Poznanie mechaniczne**. Znamy formułę na pamięć, wiemy, że jest sensowna i jak ją zastosować, ale jeszcze nie sprawdziliśmy, czy jest poprawna choćby dla jednego wyboru liczb a, b.

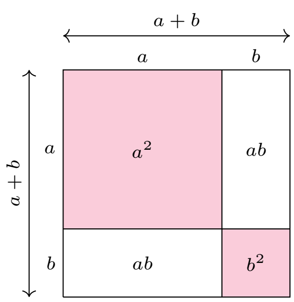
(II) **Poznanie indukcyjne**. Sprawdziliśmy formułę na kilku losowo wybranych przykładach, przekonaliśmy się, że jest poprawna, sądzimy, że jest zatem poprawna dla dowolnych par liczb naturalnych, tym bardziej, że formuła widnieje w podręczniku.

(III) **Poznanie racjonalne**. Przeprowadziliśmy dowód formuły,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{2}$$

korzystając z naszej wiedzy o arytmetyce liczb naturalnych. Zatem formuła jest poprawna, jesteśmy o tym przekonani.

Ale czy na podstawie powyższych badań można uznać formułę za oczywistą? Czy przemawia do naszej intuicji? Z pewnością nie poraża swoją oczywistością. Zauważmy, że w dotychczasowym poznaniu reguły mieliśmy do czynienia z jej coraz głębszym psychologicznym poznaniem. Jeśli poprzestaniemy na dotychczasowych stopniach poznania, co jest dość typowe, to nie możemy powiedzieć, że się z naszą formułą zaprzyjaźniliśmy. Spinoza proponuje kolejny poziom poznania.



(IV) **Poznanie intuicyjne**. Jest dla nas oczywiste, że formuła jest prawdziwa, nie może być inaczej, nikt nas nie przekona, że jest inaczej. Nota bene *oczywistość* jest poziomem poznania podkreślanym także przez Kartezjusza jako konieczny dla prawdziwego poznania (*Rozprawa o metodzie*, 1656). W przypadku naszej reguły ten poziom oczywistości osiągamy, przedstawiając geometryczny dowód formuły, który znany był już w starożytności (Euklides, *Elementy*, twierdzenie II, 4).

Czy to już koniec? Wręcz przeciwnie, teraz dopiero zobaczyliśmy, jakie wyobrażenia stoją za naszą formułą. Możemy ją dalej wykorzystać w różnych kierunkach, które nam się narzucają. Należą do nich:

(i) powiększenie zakresu liczb a, b,

(ii) użycie innego wykładnika niż 2,

(iii) powiększenie liczby składników,

(iv) inne rozumienia obiektów a, b i operacji dodawania i mnożenia.

Jest to powszechna metoda odkrywania nowych prawd matematycznych – *indukcja i analogia* [Polya, 1954].

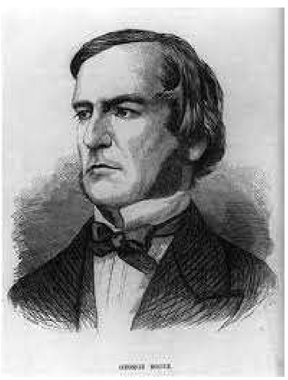
Ad (i) Proponujemy, aby Czytelnik spróbował rozszerzyć zakres poprawności formuły, kolejno dla liczb rzeczywistych spełniających warunki (a) $a, b > 0$, (b) $a > 0$, $b < 0$, (c) $a, b < 0$, posługując się wyobrażeniami geometrycznymi.

Pomoże to uświadomić sobie trudności starożytnej geometrii, w której liczby były długościami odcinków, oraz docenić dobrodziejstwo algebry. Zawsze jednak, gdzie to możliwe, warto poszukać kluczowego geometrycznego pomysłu.

Możemy też sprawdzić, że reguła jest poprawna dla dowolnych liczb zespolonych, i znaleźć geometryczne interpretacje formuły dla kilku istotnie różnych przypadków szczególnych. To może nas doprowadzić – jak wszystkich matematyków aż do końca XVIII wieku i jeszcze dłużej – do wniosku, że jest to formuła algebraiczna ogólnie poprawna. Ukuto nawet na takie mniemanie nazwę, *principle of the generality of algebra*. Znaczyło to tyle, że formuła sprawdzona dla pewnego dość szerokiego zakresu jej argumentów będzie także poprawna dla wszystkich innych argumentów i interpretacji algebraicznych. Było to założenie dość niebezpieczne, z drugiej strony jednak bardzo płodne. Matematycy XVIII i XIX wieku bronili tej swobody, twierdząc, że nadmierne ograniczenia gwoli ścisłości prowadzić mogą do zastoju matematyki, co później wielokrotnie się zresztą powtarzało – przypomnijmy choćby kontrowersje wobec rachunku operatorowego Heaviside'a, pozornej magii matematyki S. Ramanujana czy całek Feynmana. Fizycy, inżynierowie i wizjonerzy niejednokrotnie wymuszali rozwój matematyki.

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865)

Szokiem była konstatacja, że już w zakresie liczbowym nie jest to formuła algebraiczna ogólnie poprawna, gdy Rowan Hamilton wprowadził kwaterniony (1843) (potrzebne np. w zagadnieniach faktoryzacji wielomianów, podobnie jak wcześniej liczby zespolone) [*Liczby zespolone i kwaterniony*, Δ^{10}_{16}]. Zauważmy, że w dowodzie naszej formuły, patrz równości w (2), użyliśmy założenia, że dla dowolnych a, b jest zawsze $ab = ba$, a to jest nieprawda w przypadku kwaternionów.



George Boole (1815–1864)

Możemy teraz zadać narzucające się pytanie (patrz punkt (iv) powyżej): dla jakich obiektów a, b i interpretacji operacji dodawania i mnożenia nasza formuła ma sens, jest poprawna bądź nie jest poprawna?

Studenci matematyki już na pierwszym roku wiedzą, że nasza formuła ma sens np. dla macierzy kwadratowych, ale w ogólności nie jest wtedy poprawna, natomiast jest poprawna w zakresie np. macierzy diagonalnych. Mnożenie macierzy odpowiada bowiem składaniu przekształceń, dla których kolejność wykonania jest oczywiście istotna.

Możemy rozważać naszą formułę dla całkiem innych obiektów, np. za obiekty a, b przyjąć dowolne zbiory, z operacjami ich teoriomnogościowego dodawania i mnożenia, czyli sumy i przecięcia. Mamy wtedy

$$(a \cup b)^2 = (a \cup b) \cap (a \cup b) = a \cup b$$

oraz

$$a^2 \cup 2(a \cap b) \cup b^2 = (a \cap a) \cup ((a \cap b) \cup (a \cap b)) \cup (b \cap b) = a \cup b,$$

stąd nasza formuła jest poprawna także przy takiej interpretacji, czyli w algebrze Boole'a. Idąc tym tropem, możemy też wypróbować naszą formułę na dowolnych zdaniach a, b o wartościach logicznych 1 lub 0, z operacjami logicznymi $a \wedge b$ oraz $a \vee b$ (koniunkcji i alternatywy).

Podobnie do wektorów w $\mathbb{R}^2$ możemy rozważać np. wektory w przestrzeni euklidesowej dowolnego skończonego wymiaru, a nawet w przypadku, gdy rozważane wektory mają nieskończenie wiele współrzędnych.

Zauważmy, że gdy a jest wektorem w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$, to a^2 możemy interpretować jako kwadrat jego długości, a zatem a^2 jest liczbą nieujemną, natomiast dla wektorów a, b wyrażenie ab możemy interpretować jako ich iloczyn skalarny $a \cdot b$, który też jest liczbą rzeczywistą. Wtedy rachunek (2) pozostaje w mocy, co pokazuje, że nasza formuła jest prawdziwa również w tym przypadku.

Natomiast jeśli dla wektorów a i b symbolowi ab nadamy interpretację iloczynu wektorowego $a \times b$, a dodawaniu interpretację zwykłego dodawania wektorów, to nasza formuła jest w ogólności nieprawdziwa.

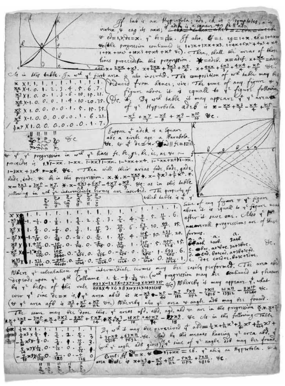
Ad (ii) Przejdźmy teraz do niektórych istotnych uogólnień w punkcie (ii). Znając geometryczny dowód naszej formuły dla liczb dodatnich, nie jest trudno odgadnąć formułę dla sześcianu sumy, tzn.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

Niels Abel (1802–1829)

Dowód formuły (3) przeprowadził dopiero Niels Abel, ten sam, który udowodnił, że dla wielomianów piątego stopnia nie istnieje elementarny wzór na ich pierwiastki. Od niego pochodzi też nazwa grupy abelowej (nieabelowej), w której działania grupowe są przemienne (nieprzemienne) – podstawowego pojęcia dla teorii całkowalności równań.

Formuła (3) posiada wersję z dowolnym wykładnikiem rzeczywistym, której tu jednak nie przytoczymy.



Obliczenia Newtona dla logarytmu z dokładnością do ponad 50 miejsc po przecinku

korzystając z analogicznej konstrukcji geometrycznej, tym razem w przestrzeni euklidesowej wymiaru trzy. Dla wyższych potęg naturalnych nie możemy się posłużyć interpretacją geometryczną, bo nie mamy naturalnych intuicji co do przestrzeni czterowymiarowej. Tym niemniej rozwinięcie dla wyrażenia $(a+b)^n$ dla dowolnej liczby naturalnej n (prowadzące do tzw. dwumianu Newtona) było już znane w XVII w. (James Gregory, 1670) [Coolidge, 1949]. A co otrzymamy, gdy wykładnik jest liczbą wymierną? Wyrażenie $(a+b)^{m/n}$ ma wtedy sens, ale jak je rozwinąć w sumę odpowiednich iloczynów? Tym zagadnieniem zajmowali się w XVII wieku m.in. James Wallis i Isaac Newton. Ten ostatni doszedł do poprawnej formuły dla liczb wymiernych, której jednak nie udowodnił do końca. Jest to formuła będąca w ogólności nieskończonym szeregiem

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)\cdots\left(\frac{m}{n}-k+1\right) a^{\frac{m}{n}-k} b^k \tag{3}$$

(gdzie $0! = 1! = 1$, $2! = 1\cdot 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3$, itd.). Newton wykorzystał ją do obliczenia wielu całek dla całych klas krzywych, także niealgebraicznych, które nazywano wtedy *krzywymi mechanicznymi*. Był z tego bardzo dumny, gdyż jego wielki poprzednik Kartezjusz w swojej *Geometrii* badał tylko krzywe algebraiczne, a w dodatku całkowaniem wcale się nie zajmował. Newton wykorzystywał także inne rozwinięcia funkcji w szeregi nieskończone dla konkretnych obliczeń numerycznych, przy czym wykonywał niekiedy takie obliczenia z dokładnością do kilkudziesięciu miejsc po przecinku.

Ad (iii) Formuła (1) ma także uogólnienie w tym kierunku, mianowicie:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m},$$

gdzie sumujemy po wszystkich ciągach liczb całkowitych nieujemnych $k_1, k_2, \ldots, k_m$ takich, że $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. W szczególności, dla $m = 2$, $n = 2$, $x_1 = a$, $x_2 = b$ otrzymujemy wyjściową formułę (1).

Na tym kończymy naszą zabawę, która okazała się pouczająca. Przede wszystkim pokazała ogromną siłę zapisów symbolicznych, które można interpretować na różne sposoby, jak również zilustrowała płodność metod indukcji i analogii w matematyce. Zaprzyjaźniliśmy się także głębiej z pozornie trywialną formułą ze szkoły średniej. Dalsze zaprzyjaźnianie się z tą formułą wykracza już poza ramy tego artykułu, a gdyby ktoś chciał dociekać dalej, np. poznać geometryczne konstrukcje operacji dodawania i mnożenia w języku geometrii rzutowej, albo dowiedzieć się, jak mogliby widzieć problem „czy $ab = ba$?” kosmici, zachęcamy do lektury pozycji [Stillwell, 2002] oraz obejrzenia wykładu [Stillwell, 2011].

Bibliografia

J. L. Coolidge, *The Story of the Binomial Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 56, No. 3 (Mar., 1949), str. 147–157.

G. Polya, *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, 1954.

G. Polya, *Odkrycie matematyczne*, Wydawnictwo Naukowo Techniczne, 1975.

J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer, 2002.

ET Math: How different could it be? - John Stillwell (SETI Talks), Youtube, 2011.

Rozwiązanie zadania M 1697. Ustalmy liczbę całkowitą dodatnią n i załóżmy, że jest parzysta. Mamy $n = 2n - n$, a skoro $2 \mid n$, to n oraz $2n$ mają tyle samo dzielników pierwszych.

Załóżmy więc, że n jest liczbą nieparzystą. Niech $p > 2$ będzie najmniejszą liczbą pierwszą, która nie dzieli n. Mamy

$$n = pn - (p-1)n.$$

Przez $L(x)$ oznaczmy liczbę dzielników pierwszych liczby całkowitej dodatniej x. Pozostaje wykazać, że $L(pn) = L\left((p-1)n\right)$. Skoro $p \nmid n$, to oczywiście $L(pn) = L(n) + 1$. Z drugiej strony zapiszmy $p - 1 = 2^r \cdot m$, gdzie $r, m \geqslant 1$ są całkowite oraz $2 \nmid m$. Oczywiście $m < p$, więc dowolny dzielnik pierwszy liczby m dzieli też n. Wobec tego z nieparzystości n dostajemy, że

$$L((p-1)n) = L(2^r \cdot m \cdot n) = L(n) + 1 = L(pn),$$

co kończy rozwiązanie.

Rozwiązanie zadania M 1698. Odpowiedź: Nie można.

Podzielmy sześcian na milion sześcianów o krawędzi 1. Położenie każdego sześcianu podziału możemy opisać za pomocą trójki współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Niech

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 49, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 50 \leqslant n \leqslant 51, \\ (-1)^{n+1} & \text{dla } 52 \leqslant n \leqslant 100. \end{cases}$$

Wpiszmy w sześcian o współrzędnych (x, y, z) liczbę $a_x a_y a_z$. Wówczas każdy prostopadłościan o wymiarach $1\times 1\times 51$ i $1\times 1\times 53$ pokrywa sześciany o sumie liczb 0, podczas gdy suma wszystkich liczb wpisanych w sześciany podziału jest równa -1.