punktu, natomiast przy udanym rzucie przeszkodą stanie się szyja mustanga, topologicznie równoważna walcowi. Jakby tego było mało, mimo iż geometrycznie torus $\mathbb{T}^2$ ma taką samą metrykę jak płaszczyzna $\mathbb{E}^2$, jest on dodatkowo skończony. Badając te wielospójne przestrzenie płaskie, możemy nawiązać do archetypu, czyli $\mathbb{E}^2$.

Poćwiczmy trochę naszą wyobraźnię. Skonstruujmy $\mathbb{T}^2$, biorąc odpowiedni prostokąt o bokach L_1 i L_2 oraz identyfikując (sklejając) naprzeciwległe boki. Prostokąt (zwany obszarem fundamentalnym torusa) jest podzbiorem $\mathbb{E}^2$. Możemy sobie dalej wyobrazić płaszczyznę $\mathbb{E}^2$ całkowicie „wykafelkowaną" takimi prostokątami. Pamiętając o utożsamieniach boków, proste w $\mathbb{E}^2$ odtworzą nam krzywe geodezyjne na $\mathbb{T}^2$ – opuszczając obszar fundamentalny, prosta wchodząca do jego kopii obrazuje geodezyjną pojawiającą się z kierunku antypodalnego (czyli po obiegnięciu torusa). Proste przecinające kolejne kopie obrazują wielokrotne obiegi torusa.

Powyższe intuicyjnie opisane konstrukcje możemy uściślić. Nazwijmy płaszczyznę przestrzenią uniwersalną nakrywającą torusa. Analogiem trójwymiarowym jest torus $\mathbb{T}^3$ i powyższą konstrukcję wyobrazić sobie można jako gabinet luster – obszar fundamentalny to prostopadłościan (rozpięty na ortogonalnych wzajemnie wektorach L_1, L_2, L_3) o wszystkich ścianach wyłożonych lustrami. Obserwator widzi nieskończenie wiele kopii samego siebie w przestrzeni $\mathbb{E}^3$ (przestrzeni nakrywającej). Widzimy zatem, że kuszące jest tu pytanie: czy Wszechświat może mieć nietrywialną topologię (tj. być wielospójny), a płaska przestrzeń jest jego uniwersalną przestrzenią nakrywającą? Taki płaski przestrzennie Wszechświat miałby skończoną objętość $V_{\text{top}} = a(t)^3 L_1 \cdot (L_2 \times L_3)$ (rosnącą w czasie wraz z ekspansją).

Zauważmy, iż $\mathbb{T}^3$ nie jest jedynym przykładem płaskiego Wszechświata o nietrywialnej topologii – takich możliwości jest dodatkowo 16 (tzn. nie licząc $\mathbb{E}^3$ i $\mathbb{T}^3$). Odpowiadające im dyskretne grupy symetrii (dla $\mathbb{T}^3$ są to translacje generowane przez wektory L_i; $i = 1, 2, 3$) są bardziej skomplikowane. Obserwacyjna konfrontacja tych idei jest komplikowana przez ekspansję Wszechświata. Tym niemniej przeprowadzono testy obserwacyjne wielospójnego Wszechświata, w tym w oparciu o dane satelity Planck dotyczące anizotropii kosmicznego promieniowania tła (dla przypadku $\mathbb{T}^3$), uzyskując wynik negatywny. Wynik ten nie przesądza jednak sprawy, a oznacza jedynie, że jeżeli Wszechświat ma nietrywialną topologię i jest przestrzennie skończony, to rozmiar fundamentalnego prostopadłościanu (o którym była mowa wcześniej) jest większy niż ta część Wszechświata, która jest dostępna naszym obserwacjom, czyli ta znajdująca się wewnątrz horyzontu cząstek. Inaczej mówiąc, nie jesteśmy w stanie odróżnić nieskończonego Wszechświata od takiego skończonego, którego obserwowalna dla nas część mieści się całkowicie w jednym fundamentalnym prostopadłościanie. Podsumowując: jeżeli rozmiar charakterystyczny ($r_{\text{top}} \sim V_{\text{top}}^{1/3}$) Wszechświata płaskiego o nietrywialnej topologii jest większy niż horyzont cząstek, nie możemy się o tym teraz dowiedzieć; w przypadku zaś, gdy jest większy niż horyzont zdarzeń – to nie dowiemy się o tym nigdy...

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1693. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Środki okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC pokrywają się odpowiednio ze środkami okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie ADC. Wiedząc, że $AB = 1$, wyznacz długości pozostałych boków oraz miary kątów czworokąta $ABCD$.
Rozwiązanie na str. 21

M 1694. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, takimi że

$$a_1^2 + 2a_2^3 + \cdots + na_n^{n+1} < 1.$$

Udowodnij, że

$$2a_1 + 3a_2^2 + \cdots + (n+1)a_n^n < 3.$$

Rozwiązanie na str. 16

M 1695. Czy istnieje liczba całkowita większa niż 1000000, taka że średnia arytmetyczna i geometryczna wszystkich jej dzielników są całkowite?
Rozwiązanie na str. 6

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1037. Po spostrzeżeniu przeszkody kierujący tramwajem rozpoczyna hamowanie. Oszacuj, jak długą drogę pokona tramwaj do całkowitego zatrzymania, jeśli jego początkowa prędkość $v = 50$ km/h. Ile ciepła wydzieli się podczas hamowania? Masa pustego tramwaju $m_0 \approx 16\,500$ kg, średnia liczba pasażerów $n = 50$, współczynnik tarcia stali o stal $\mu_k \approx 0{,}1$, a przyspieszenie ziemskie $g \approx 10$ m/s^2.
Rozwiązanie na str. 5

F 1038. Stwierdzono, że długości fal linii widmowych obserwowanych w sygnale pochodzącym z supernowej PS1-11mq są $1 + z = 1{,}81$ (z jest tzw. przesunięciem ku czerwieni) razy większe niż długości fal odpowiadających im charakterystycznych linii widm atomowych mierzonych na Ziemi. Od chwili rozbłysku tej supernowej rejestrowano także zmiany jej blasku i po czasie $t = 54$ dni zaobserwowano charakterystyczną zmianę w kształcie krzywej zaniku jej jasności. Ile czasu, t_0, trwały procesy prowadzące do tej zmiany w układzie związanym z supernową?
Rozwiązanie na str. 5