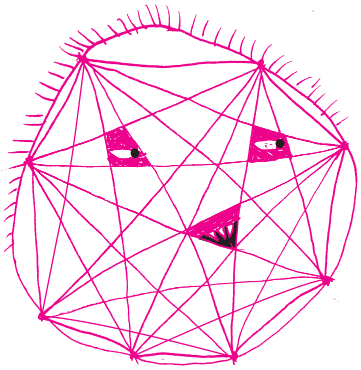
Matematyczne zoo

Michał MIŚKIEWICZ



Nauczyciele i wykładowcy nieustannie starają się nas przekonać, że w matematyce rozwiązania problemów cechują się zaskakującą elegancją. Przy czym nie chodzi tu o rozwiązania redagowane przez uczniów – z tymi bywa różnie – tylko o same obiekty matematyczne, które stanowią odpowiedź na postawione problemy. Zazwyczaj są one eleganckie, proste w opisie, symetryczne lub po prostu „piękne”. Jak twierdził Godfrey Hardy: *There is no permanent place in the world for ugly mathematics.*

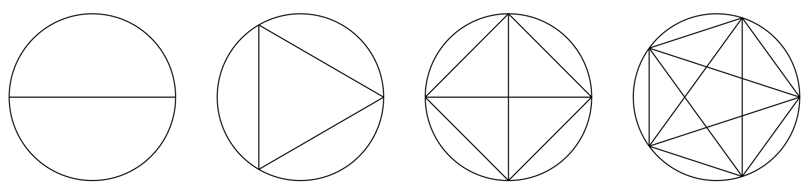
Przykładowo, na płaszczyźnie wśród wszystkich figur o obwodzie 2π największe pole ma koło jednostkowe – i tylko ono, a nie żaden z nieforemnych 123-kątów. Podobnych sytuacji jest dużo i zajmują one (zresztą słusznie) sporo miejsca również w *Delcie.*

Na przekór tym tendencjom chciałbym poprowadzić Czytelnika przez matematyczne zoo – trzy problemy, których rozwiązania zaskakują. Czy są brzydkie? Raczej nie, ale na pewno inne, niż byśmy się spodziewali, a w każdym razie bardziej skomplikowane. A może fakt naszego zaskoczenia wynika jedynie z naszego punktu widzenia, a przedstawione przykłady – podobnie jak słonie i szympansy, które w innym klimacie są tak zwyczajne jak konie i jeże – byłyby dla nas naturalne, gdybyśmy wiedzieli i rozumieli więcej?

To samo pytanie można zadać ogólniej: czy odkrywane przez nas struktury matematyczne są proste dlatego, że matematyka jest prosta, czy są proste, bo tylko takie umiemy odkryć?

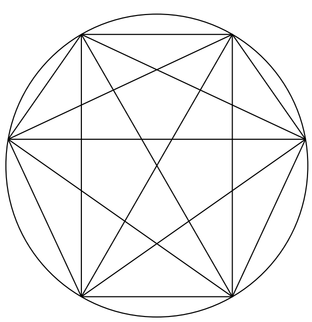
Problem Mosera

Na okręgu zaznaczamy n punktów i rysujemy wszystkie cięciwy łączące te punkty. Jeśli nie mamy pecha, żadne trzy cięciwy się nie przecinają, co daje maksymalną możliwą liczbę obszarów, na które podzielone zostało koło. Ile tych obszarów jest? Zobaczmy:



$r_2 = 2$ $\quad$ $r_3 = 4$ $\quad$ $r_4 = 8$ $\quad$ $r_5 = 16$

Liczba obszarów r_n to kolejno $2, 4, 8, 16$, i odpowiedź narzuca się sama: $r_n = 2^{n-1}$.



$r_6 =?$

O dziwo dla $n = 6$ podobny rysunek z sześcioma punktami równomiernie rozłożonymi na okręgu daje jedynie 30 (a nie $2^5 = 32$) obszarów. Oczywiście jest to wina trzykrotnego przecięcia w samym środku. Ale czy tylko? Czytelnik może samodzielnie sprawdzić na rysunku obok, że po nieznacznej poprawce obszarów jest 31, czyli nadal o jeden za mało. Mamy więc do czynienia z niemiłą niespodzianką – zamiast wzorem $r_n = 2^{n-1}$ liczba obszarów wyraża się mniej elegancką formułą

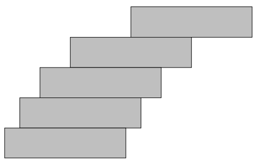
$$r_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}.$$

Ten problem – po raz pierwszy opisany przez Leo Mosera w 1949 roku – dobrze pokazuje, jak może nas zwieść oczekiwanie prostych odpowiedzi na proste pytania.

Napotkane przez nas zwierzę jest jednak egzotyczne jedynie powierzchownie. Wynik można bowiem przedstawić w postaci $r_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{4}$, co tłumaczy, dlaczego pokrywa się z 2^{n-1} dla $n \leqslant 5$, ale nie dla większych n. Zachęcam Czytelnika do samodzielnego wyprowadzenia jednej lub drugiej postaci wzoru na liczbę obszarów.

Odnośniki do dalszej lektury:
L. Moser, W. Bruce Ross, *Mathematical Miscellany*, Mathematics Magazine, 23 (1949).
Dividing a circle into areas, Wikipedia.
Ciąg A000127, Internetowa Encyklopedia Ciągów Liczbowych.

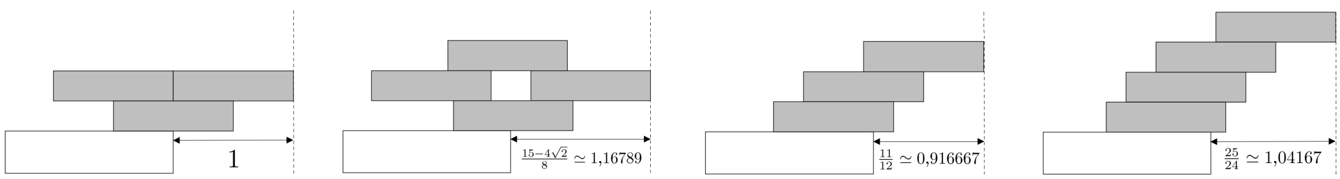
Bardzo pochyłe stosy cegieł



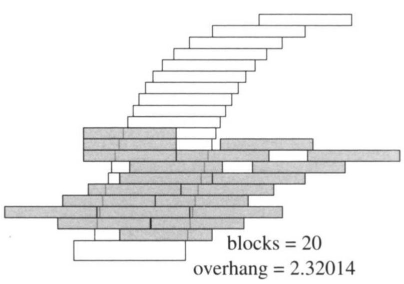
Ułożenie cegieł w *stos harmoniczny* – optymalne, jeśli w każdej warstwie ma być jedna cegła

Mamy do dyspozycji stół oraz n identycznych sześciennych cegieł o krawędzi 1 (jednorodnych, bez tarcia). Zadanie polega na tym, by z cegieł ułożyć na stole stos, który będzie sięgał jak najdalej poza krawędź stołu (w poziomie). Można o tym problemie przeczytać w artykule Karola Gryszki Δ^7_{19} wraz z przykładowym ułożeniem cegieł (jak na rysunku). W takiej wieży górna cegła jest wysunięta o $1/2$ względem drugiej, druga o $1/4$ względem trzeciej itd. – dolna n-ta cegła jest wysunięta o $1/(2n)$ poza krawędź stołu. Łączne wychylenie wynosi
$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{2}\ln n \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$
a więc może być dowolnie duże, jeśli tylko mamy pod ręką wystarczający zapas cegieł. Całkiem imponujące.

Ale czy jest to optymalne ułożenie? Jeśli umówimy się, że cegły wolno kłaść tylko kolejno jedna na drugiej, to okazuje się, że tak. Ale w ogólności da się lepiej – dla $n = 3, 4$ łatwo zauważyć, że użycie niektórych cegieł jako przeciwwagi wbrew pozorom pozwala uzyskać większe wychylenie. Konstrukcję zilustrowaną poniżej można uogólnić na dowolną liczbę cegieł i okazuje się, że daje to optymalne rozwiązanie dla $n = 1, 2, \ldots, 19$, ale na tym koniec.



Porównanie optymalnych stosów 3 i 4 cegieł z odpowiednimi stosami harmonicznymi.
Źródło: M. Paterson, U. Zwick, *Overhang*, Amer. Math. Monthly 116 (2009), no. 1



Optymalny stos z 20 cegieł.
Źródło: M. Paterson, Y. Peres, M. Thorup, P. Winkler, U. Zwick, *Maximum Overhang*, Amer. Math. Monthly 116 (2009), no. 9

Paterson i Zwick znaleźli numerycznie przybliżone optymalne rozwiązania dla wszystkich $n \leqslant 30$. Efekt tej optymalizacji dla 20 cegieł można podziwiać na marginesie. Trudno dopatrzeć się jakiejkolwiek symetrii w tej konfiguracji. Kto by się spodziewał?

Grupa Monstrum

There's a thing called the Monster Grup, which is a beautiful, very large symmetrical thing. (...) There's never been any kind of explanation of why it's there and it's obviously not there just by coincidence.

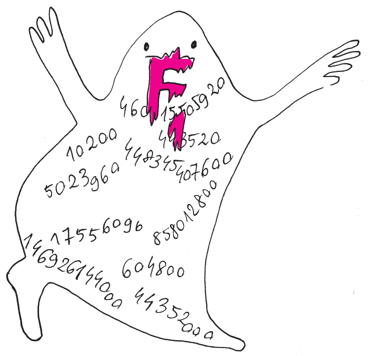
John Conway

Ograniczę się tutaj do pobieżnej prezentacji grupy monstrum i jej roli w teorii grup, a dużo bogatsze omówienie Czytelnik znajdzie w artykule Gabrieli Majewskiej w Δ^5_{13}. Przegląd grup skończonych zacznijmy od permutacji – są to po prostu bijekcje między ustalonym zbiorem skończonym a nim samym. Do ich zapisu zastosujemy następujący zapis oparty na cyklach. Na przykład tę samą bijekcję ze zbioru $\{1, \ldots, 6\}$ w niego samego można opisać na dwa sposoby:
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad (235)(46).$$
Pierwszy sposób tłumaczy się sam, natomiast drugi oznacza, że bijekcja ta przeprowadza $2, 3, 5$ na $3, 5, 2$ (odpowiednio), $4, 6$ na $6, 4$, a elementy pominięte w zapisie (w tym przypadku 1) pozostawia w miejscu.

Odnotujmy jeszcze, że permutacje zbioru $\{1, \ldots, n\}$ można składać (jako funkcje). Zbiór wszystkich takich permutacji wraz z działaniem składania (oznaczanym tu przez $*$) nazwiemy *grupą permutacji* S_n. *Podgrupą* S_n nazwiemy natomiast każdy podzbiór $G \subseteq S_n$ zamknięty na działanie składania☹. Dla przykładu:

- Jeśli jako zbiór $\mathbb{Z}_n$ przyjmiemy cykl $(123\ldots n)$ wraz ze wszystkimi jego iteracjami (wielokrotnymi złożeniami), to powstały n-elementowy zbiór jest podgrupą. W przypadku $n = 4$ jest to zbiór
$$\mathbb{Z}_4 = \big\{(1234), (13)(24), (1432), \mathrm{id}\big\}.$$

☹Wypada tu uprzedzić Czytelnika, że dla zwięzłości postanowiłem przytoczyć definicje skrojone do potrzeb artykułu, które jednak zawodzą w innych sytuacjach. Poprawne ogólne definicje omawia Joachim Jelisiejew w Δ^4_{19}.



- Dla $n \geqslant 3$ podgrupą S_n nie jest zbiór wszystkich transpozycji (czyli permutacji postaci (ab)) wzbogacony o permutację identycznościową. Mianowicie dwie transpozycje (12), (23) po złożeniu dają $(23) * (12) = (132)$, co transpozycją już nie jest.
- Podgrupą jest za to zbiór A_n wszystkich permutacji parzystych, czyli takich, które dają się przedstawić jako złożenie parzystej liczby transpozycji. Okazuje się, że stanowi to dokładnie połowę wszystkich permutacji, np. dla $n = 4$ jest to

$$A_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)\}.$$

Na potrzeby niniejszego wprowadzenia przyjmiemy, że grupa skończona to nic innego jak podgrupa którejś z grup permutacji S_n☹.

Przejdźmy do problemu klasyfikacji grup skończonych. Na zasadzie analogii pomyślmy najpierw o klasyfikacji zbiorów skończonych. Jest ich bardzo dużo, więc umówmy się, że dwa zbiory utożsamimy, jeśli są równoliczne (czyli istnieje między nimi bijekcja). Sprowadza nas to do klasyfikacji liczb naturalnych $1, 2, 3, \ldots$, gdyż zbiory k-elementowe można utożsamić z liczbą k. Za pomocą iloczynu można rozkładać niektóre liczby na prostsze, np. $6 = 2 \cdot 3$ (w świecie zbiorów odpowiada to produktowi kartezjańskiemu). Istnieją oczywiście liczby nierozkładalne (są to $2, 3, 5, 7, \ldots$), nazywamy je pierwszymi. Znając je, możemy zrekonstruować całe bogactwo liczb naturalnych poprzez tzw. rozkład na czynniki pierwsze.

➢ Homomorfizm grup A, B to funkcja $f\colon A \to B$, która zachowuje działanie, czyli $f(a_1 * a_2) = f(a_1) * f(a_2)$ dla dowolnych $a_1, a_2 \in A$.
➢ Izomorfizmem grup nazwiemy homomorfizm będący bijekcją zbiorów.
➢ Grupę C nazywamy rozszerzeniem grup A, B, jeśli A jest izomorficzna z pewną podgrupą $A' \subseteq C$ oraz istnieje homomorfizm $f\colon C \to B$, dla którego $f(C) = B$ oraz $f^{-1}(\{\mathrm{id}\}) = A'$.

Uwaga ☹ pozostaje tutaj w mocy!

Nie inaczej jest z grupami skończonymi. Zamiast równoliczności rozważamy pojęcie *izomorfizmu* – dwie grupy utożsamiamy, jeśli mają tę samą strukturę. Dla przykładu, grupa $\{\mathrm{id}, (124), (142)\}$ (podgrupa S_4) działa tak samo jak grupa $\mathbb{Z}_3$, więc nie ma sensu ich odróżniać przy klasyfikacji. Z kolei iloczyn liczb należy zastąpić przez *rozszerzenie* grup. Grupy, których nie da się w ten sposób rozłożyć na prostsze, nazywamy *prostymi*. Wszystkie te pojęcia opierają się na kluczowej koncepcji *homomorfizmu*; skrótowe omówienie można znaleźć na marginesie.

Ludzkości udało się sklasyfikować wszystkie skończone grupy proste. Rezultat jest piękny, ale raczej skomplikowany; do jego osiągnięcia potrzebna była praca kilkuset matematyków na przestrzeni dziesiątek lat i tysięcy stron publikacji. Niemniej udało się podzielić wszystkie skończone grupy proste na 18 nieskończonych rodzin oraz 26 „niedobitków”, które do żadnej z rodzin nie pasują. Czytelnik zna już dwie z tych rodzin:

Przykład: grupa S_n jest rozszerzeniem A_n i S_2, więc nie jest prosta dla $n \geqslant 3$. Istotnie, funkcja $f\colon S_n \to S_2$ przyporządkowująca id permutacjom parzystym i (12) pozostałym jest homomorfizmem spełniającym $f(S_n) = S_2$ i $f^{-1}(\{\mathrm{id}\}) = A_n$.

- grupy $\mathbb{Z}_p$ (*cykliczne*) dla p będącego liczbą pierwszą,
- grupy A_n (*alternujące*) dla $n \geqslant 5$,

chociaż nie musi być oczywiste, dlaczego te grupy są proste.

Przejdźmy do *niedobitków*, znanych jako grupy sporadyczne. Jest ich 26, a największa z nich nosi nazwę *grupa Monstrum*. Posiada ona

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 = \\ = 808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368\,000\,000\,000,$$

czyli około $8 \cdot 10^{53}$, elementów. Dla porównania liczba atomów we Wszechświecie jest rzędu 10^{80}. Nie jest to oczywiście największa ze skończonych grup prostych – więcej elementów ma np. A_{44} – ale największa wśród sporadycznych. Jest jednak zaskakujące, że tak ogromny obiekt stanowi jedną z podstawowych „cegiełek”, z których zbudowany jest świat skończonych grup.

Historię i matematykę stojącą za grupą Monstrum można też poznać poprzez filmy w serwisie YouTube: Monster Group i *Life, Death and the Monster* na kanale Numberphile oraz *Group theory, abstraction, and the 196,883-dimensional monster* na kanale 3Blue1Brown.

Podobne zaskoczenie towarzyszyło odkrywcom tej grupy w latach 70. ubiegłego wieku. Jej istnienie przewidział Bernd Fischer, a ściśle zweryfikował Robert Griess, który nadał jej nazwę *friendly giant* (przyjazny olbrzym). Ostatecznie jednak przyjęła się nazwa *monster group* (grupa Monstrum), zaproponowana przez Johna Conwaya. Ten ostatni poświęcił badaniu monstrum wiele uwagi, chcąc odpowiedzieć na pytanie, dlaczego ono tak naprawdę istnieje.