Kwadrat?

Bartłomiej BZDĘGA

Uwaga. W całym artykule liczby k, m, n, q, r są całkowite, a liczba p – pierwsza.

Korzystając z tego, że numer niniejszego kącika jest kwadratem liczby naturalnej, napiszę o tym, jak rozpoznać liczby, które kwadratami liczb naturalnych na pewno nie są. Wymienię tu trzy najprostsze sposoby.

Sposób I: rozkład na czynniki pierwsze. W rozkładzie kwadratu liczby naturalnej wszystkie czynniki pierwsze występują z wykładnikami parzystymi (por. kącik nr 31, Δ^7_{21}). Aby wykazać, że dana liczba nie jest kwadratem, wystarczy więc znaleźć jeden czynnik pierwszy, który ma wykładnik nieparzysty. Można to oczywiście uogólnić – w rozkładzie k-tej potęgi wszystkie czynniki pierwsze mają wykładniki podzielne przez k. W praktyce najczęściej stosuje się to tak: jeśli $p \mid n$, ale $p^2 \nmid n$, to n nie jest kwadratem, ani żadną potęgą liczby naturalnej o wyższym wykładniku.

Sposób II: reszty z dzielenia. Ustalmy liczbę $m > 1$. Każdą liczbę naturalną n można jednoznacznie przedstawić w postaci $qm + r$, w której $-m/2 < r \leqslant m/2$. Wówczas $n^2 = m(q^2m + 2qr) + r^2$, więc aby poznać wszystkie możliwe reszty z dzielenia kwadratów liczb naturalnych przez m, wystarczy wyznaczyć reszty z dzielenia przez m liczb $0^2, 1^2, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor^2$. Te reszty nazywamy *kwadratowymi*, a pozostałe – *niekwadratowymi*. Jeśli liczba naturalna daje resztę niekwadratową z dzielenia przez m, to nie jest ona kwadratem liczby naturalnej. Można, ogólniej, rozważać reszty sześcienne i reszty dla wyższych wykładników.

Sposób III: szacowanie. Zachęcam do zapoznania się z artykułem *Między kwadratami* autorstwa Michała Kiezy (gazetka OMJ *Kwadrat*, nr 20, wrzesień 2017). Idea jest następująca: liczby znajdujące się pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb naturalnych nie są kwadratami liczb naturalnych. To samo można oczywiście powiedzieć o sześcianach między sześcianami, jak również o wyższych wykładnikach.

Powyższe metody zilustruję dwoma prostymi przykładami.

Przykład 1. Liczba n^2 ma dwie ostatnie cyfry równe c. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c.
Rozwiązanie. Wartości 0 i 4 są możliwe, bo $10^2 = 100$ i $12^2 = 144$. Ponadto $c \notin \{2, 6\}$, bo wtedy $2 \mid n^2$, ale $4 \nmid n^2$, oraz $c \neq 5$, bo wtedy $5 \mid n^2$, ale $25 \nmid n^2$. Również $c \notin \{3, 7, 8\}$, bo 2 i 3 są niekwadratowymi resztami z dzielenia przez 5, oraz $c \notin \{1, 9\}$, gdyż 3 jest resztą niekwadratową z dzielenia przez 4.

Przykład 2. Udowodnić, że liczba $M = 444\ldots44$ ($2n$ czwórek) nie jest kwadratem liczby naturalnej.
Rozwiązanie. Możemy zapisać $M = \frac{4}{9}(10^{2n} - 1)$, więc

$$(6\ldots66)^2 = \left(\tfrac{2}{3}(10^n - 1)\right)^2 < M < \left(\tfrac{2}{3}(10^n + 2)\right)^2 = (6\ldots67)^2.$$

Zadania

1. Czy liczba $n = 657657657\ldots$, która kończy się cyfrą 6, 5 lub 7, może być kwadratem liczby naturalnej?
2. Wyznaczyć wszystkie n, dla których liczba $4^n + 2^n + 17$ jest kwadratem liczby naturalnej.
3. Niech $S(m)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej m. Udowodnić, że $S(2n^2 + 3)$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.
4. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, których nie da się przedstawić w postaci $a^3 + b^3 + c^3$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, c.
5. Wyznaczyć wszystkie n, dla których $2^n + 105$ jest kwadratem liczby naturalnej.
6. Wyznaczyć największą możliwą długość ciągu kolejnych liczb całkowitych, z których każdą można przedstawić w postaci $a^3 + 2b^2$ dla pewnych liczb całkowitych a i b.
7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, których kwadraty mają w zapisie dziesiętnym wyłącznie nieparzyste cyfry.

Wskazówki do zadań.

1. Jeśli ostatnią cyfrą jest 6 lub 5 – zastosować sposób I, a jeśli 7 – sposób II.
2. Zastosować sposób III – nierówność $4^n + 2^n + 17 \geqslant (2^n + 1)^2$ daje oszacowanie górne na n, więc mamy skończenie wiele przypadków do sprawdzenia przez bezpośrednie podstawienie.
3. Liczby m i $S(m)$ dają równe reszty z dzielenia przez 9.
4. Liczba $a^3 + b^3 + c^3$ nie daje reszty 4 ani 5 z dzielenia przez 9.
5. Rozważając resztę z dzielenia przez 3, wywnioskować, że n musi być parzyste. Niech $n = 2m$ i $k^2 = 2^{2m} + 105$. Dalej można na dwa sposoby: (1) $105 = (k - 2^m)(k + 2^m)$ i rozważyć wszystkie możliwości uzyskania 105 jako iloczynu dwóch czynników całkowitych; (2) $2^{2m} + 105 \geqslant (2^m + 1)^2$, podobnie jak we wskazówce do zadania 2.
6. Rozważając reszty kwadratowe i sześcienne, uzasadnić, że liczba $a^3 + 2b^2$ nie daje reszty 4 ani 6 z dzielenia przez 8.
7. Rozważyć reszty kwadratowe z dzielenia przez 20 w celu wykazania, że jeśli $n \geqslant 4$, to ostatnia lub przedostatnia cyfra liczby n^2 jest parzysta.