pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych, ale taki wielomian o najmniejszym stopniu ma stopień 71, a konkretnie jest następujący:

$$\begin{aligned}
&x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60}\\
&- x^{59} + 2x^{58} + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49}\\
&+ 9x^{48} - 3x^{47} - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38}\\
&- 7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27}\\
&+ 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15}\\
&+ 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^{9} + x^{7} - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3}\\
&- 6x^{2} + 3x - 6.
\end{aligned}$$

Skąd tak skomplikowana postać dla tak prostej definicji ciągu? Nie wiadomo. Czasem patrząc na takie przykłady, zadaję sobie pytanie: „Czy twierdzenia, które dowodzimy, są nieraz tak proste i eleganckie, bo taki jest świat, czy też są proste dlatego, bo tylko takie my ludzie umiemy udowodnić?”.

Wspomnienie o Andrzeju Fryszkowskim

2 listopada 2020 roku odszedł prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski, pracownik Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, jeden z założycieli Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej oraz wieloletni członek Zarządu tego Stowarzyszenia. Przez wiele lat działał aktywnie w Komitecie Głównym Olimpiady Matematycznej i Komitecie Głównym Olimpiady Matematycznej Juniorów. Wielokrotnie był opiekunem polskiej reprezentacji na Olimpiadzie Matematycznej Państw Europy Środkowej, a wcześniej na zawodach polsko-austriackich. Straciliśmy dobrego kolegę i przyjaciela.

Finał LII OM w Stalowej Woli i wygrany turniej brydżowy

Pożegnaliśmy świetnego naukowca, ale też człowieka bardzo życzliwego, otwartego, obdarzonego niezwykłym poczuciem humoru, zaangażowanego w popularyzację matematyki i edukację, rewelacyjnego brydżystę.

O dokonaniach naukowych Andrzeja Fryszkowskiego tak pisze Tadeusz Rzeżuchowski, Jego przyjaciel i współpracownik z Wydziału:

„Andrzej miał wiele zainteresowań, którym oddawał się z entuzjazmem, ale Jego prawdziwą pasją była matematyka. W latach siedemdziesiątych XX wieku, kiedy zaczynał pracować, wielkim zainteresowaniem cieszyła się teoria sterowania optymalnego – dość nowa wtedy dziedzina. Jej zagadnienia wiązały się z nowymi problemami teoretycznymi – im właśnie poświęcił większą część swoich badań. Był doktorantem Czesława Olecha, wywodzącego się z krakowskiej szkoły równań różniczkowych Tadeusza Ważewskiego, którego prace były przełomowe w powiązaniu teorii sterowania z własnościami funkcji wielowartościowych (zwanych też multifunkcjami, polami orientorowymi) oraz z inkluzjami różniczkowymi. Funkcje wielowartościowe to odwzorowania, których wartościami są podzbiory jakiejś przestrzeni, a inkluzje różniczkowe od równań różniczkowych różnią się tym, że po prawej stronie jest nie jeden element, ale cały zbiór, który może zależeć od położenia i czasu. Centralnymi zagadnieniami w tamtych czasach było istnienie tak zwanych selekcji multifunkcji, to znaczy zwykłych funkcji, których wartości dla każdego argumentu leżą w zbiorze będącym wartością tej multifunkcji, a dla inkluzji różniczkowych udowodnienie istnienia rozwiązań przy różnych warunkach nakładanych na multifunkcję stojącą po prawej stronie.

Takie problemy pojawiały się już przed wojną w pracach Leszka Zaremby i francuskiego matematyka André Marchauda. Potężny impuls badaniom w tym zakresie dał Tadeusz Ważewski. Osią badań Andrzeja Fryszkowskiego było badanie funkcji wielowartościowych, których wartości nie są zbiorami wypukłymi, a jedynie domkniętymi podzbiorami przestrzeni unormowanej. To czyniło sprawę o wiele trudniejszą, niż gdy zakłada się wypukłość. Na tym polu uzyskał bardzo dobre osiągnięcia, co między innymi zaowocowało współpracą ze świetnymi włoskimi matematykami, jak Arrigo Cellina i Alberto Bressan. Wspólnie uzyskali zwięzłe i eleganckie wyniki podsumowujące i wyjaśniające wiele wcześniejszych publikacji. Jednym z centralnych zagadnień, którym zajmował się również w późniejszych latach, było badanie tak zwanych rozkładalnych zbiorów funkcji. Zbiór funkcji jest rozkładalny, jeśli biorąc dowolne dwie należące do niego funkcje i dzieląc dziedzinę na dwie części oraz tworząc nową funkcję, która na pierwszej części dziedziny jest równa pierwszej funkcji, a na drugiej części tej drugiej funkcji, otrzymujemy funkcję również należącą do tego zbioru. Podsumowanie swoich badań, ale też dużo więcej, Andrzej Fryszkowski zawarł w monografii *Fixed Point Theory for Decomposable Sets*, wydanej w roku 2004 przez Kluwer Academic Publishers. Warto chyba na koniec powiedzieć, że zajmowanie się matematyką sprawiało Andrzejowi prawdziwą radość."

Dodajmy – nie tylko tą „wielką", naukową matematyką... Andrzej Fryszkowski z wielkim zaangażowaniem działał w Komitetach Olimpiad Matematycznych. Tak wspomina współpracę olimpijską z Nim Michał Krych z Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW:

„Andrzej Fryszkowski – mój kolega, młodszy o rok ode mnie... Był przez wiele lat członkiem Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej. Wielokrotnie spotykaliśmy się na zebraniach Komisji Zadaniowej, na finałach OM. Często umieszczano nas w tym samym pokoju, więc rozmawialiśmy o tym i owym. Sprawdzaliśmy prace finalistów. Weryfikowaliśmy też wspólnie oceny z drugiego stopnia (wystawiane przez członków komitetów okręgowych). To dosyć ciężka praca, trwająca do późnych godzin nocnych, a czasem do wczesnych porannych. Zadania bywają trudne, finaliści mają ograniczony czas na napisanie rozwiązań, więc teksty często są niedopracowane, niektóre zdania są wieloznaczne i wtedy sprawdzający muszą przyjmować jedną z możliwych interpretacji. Chodzi o to, by zadanie, które uczeń faktycznie rozwiązał, zostało tak właśnie potraktowane, pomimo niedoróbek redakcyjnych. Andrzej był w tym dobry. Wgłębiał się w tekst, potrafił siedzieć nad pracą aż do momentu, w którym stawało się jasne, co rzeczywiście uczeń udowodnił, a co tylko napisał, bo wydało mu się, że jest to oczywiste. Potrafił przegryzać się przez wielostronicowe obliczenia, za pomocą których olimpijczycy dowodzili twierdzeń geometrycznych; np. 6 stron papieru kancelaryjnego, prawie same wzory, małe litery, jakiś błąd w połowie czwartej strony, ale w dalszej części błędnie udowodniony fakt nie został wykorzystany, więc w końcu błąd bez znaczenia. Dyskusje bywały długie, ale ostatecznie zawsze potrafiliśmy się porozumieć. Andrzeja bawiły zadania, chętnie sprawdzał geometrię, proponował na ogół zadania geometryczne. Dziesięć dni po finale 61. OM przysłał mi list z alternatywnym rozwiązaniem najtrudniejszego zadania finałowego. Jego rozwiązanie było krótsze i prostsze od autorskiego, a autor tego akurat zadania miał dar do podawania krótkich rozwiązań, zresztą pisywał rozwiązania „firmowe". Przytoczę rozwiązanie Andrzeja, a Czytelników zainteresowanych dłuższymi zachęcam do zajrzenia do sprawozdania Komitetu Głównego z LXI Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 6 (finał 61. OM). Dana jest liczba rzeczywista $C > 1$. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots$, w którym $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, spełnia warunki $a_{mn} = a_m a_n$ oraz $a_{m+n} \leqslant C(a_m + a_n)$ dla $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ Dowieść, że $a_n = n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Zauważmy, że $a_4 = a_2 \cdot a_2 = 4$, $a_{2n} = a_2 \cdot a_n = 2a_n$ dla każdego numeru n, zatem $a_{2^k} = 2^k$. Prosta indukcja. Dalej $a_3^2 = a_9 \leqslant C(a_1 + a_8) = 9C$ i wobec tego $a_3 \leqslant 3\sqrt{C}$. Teraz pojawia się pomysł Andrzeja:

$$\begin{aligned} a_{m+n}^3 &= a_{(m+n)^3} = a_{m^3+3m^2n+3mn^2+n^3} \leqslant \\ &\leqslant C(a_{m^3+3m^2n} + a_{3mn^2+n^3}) \leqslant \\ &\leqslant C^2(a_{m^3} + a_{3m^2n} + a_{3mn^2} + a_{n^3}) = \\ &= C^2(a_m^3 + a_3 a_m^2 a_n + a_3 a_m a_n^2 + a_n^3) \leqslant \\ &\leqslant C^2\sqrt{C}(a_m^3 + 3a_m^2 a_n + 3a_m a_n^2 + a_n^3) = \\ &= C^{5/2}(a_m + a_n)^3, \end{aligned}$$

więc $a_{m+n} \leqslant C^{5/6}(a_m + a_n)$. Oznacza to, że stałą C można zastąpić przez liczbę $C^{5/6}$. Tę zaś przez liczbę $(C^{5/6})^{5/6} = C^{(5/6)^2}$. Łatwa indukcja przekona każdego, że liczbę C można zastąpić przez $C^{(5/6)^p}$ dla dowolnej liczby naturalnej p. Wobec tego można zastąpić stałą C przez $\lim\limits_{p\to\infty} C^{(5/6)^p} = C^0 = 1$. Udowodniliśmy, że $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$. Stąd wynika, że $a_m \leqslant ma_1 = m$. A dalej już łatwo. Dla każdej liczby n istnieje taka liczba k, że $2^k > n$. Możemy więc napisać, że $2^k = a_{2^k} = a_{(2^k-n)+n} \leqslant \leqslant a_{2^k-n} + a_n \leqslant 2^k - n + n = 2^k$. Skoro tak, to wszystkie te nierówności są równościami, w tym $a_n = n$, co kończy dowód.

Można jeszcze zauważyć, że rozwiązanie nie zmieniłoby się praktycznie wcale, gdyby założyć, że $C > 0$ zamiast $C > 1$, bo jeśli $a_1 = 1$ i $a_2 = a$, to również $2 = a_2 \leqslant \leqslant C(a_1 + a_1) = 2C$, zatem $C \geqslant 1$, ale to drobiazg.

Dodam jeszcze, że Andrzej grywał też w brydża, organizował turnieje na Politechnice Warszawskiej, kilku brydżystów pojawiło się na cmentarzu, chcąc go pożegnać. Będzie mi brakowało Andrzeja, jego zaangażowania, spokoju..."

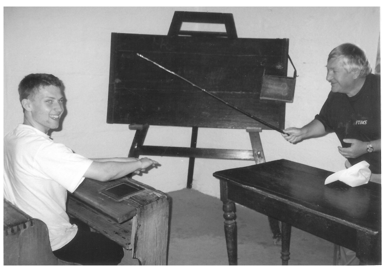
Pasja brydżowa Andrzeja Fryszkowskiego przewija się przez wspomnienia wielu Jego znajomych i przyjaciół... Tak pisze o niej Waldemar Rożek, wybitny pedagog i nauczyciel matematyki z I LO im. KEN w Stalowej Woli:

„Andrzeja poznałem podczas jednego z finałów olimpiady matematycznej. To niesamowite, że po wymianie zaledwie kilku zdań odniosłem wrażenie, jakbyśmy znali się od dawna i mieli wiele wspólnych tematów do dyskusji. Był niezwykle miłym, otwartym, wyrozumiałym i pełnym optymizmu pasjonatem matematyki. Jego pasja połączona z ogromnym spokojem i opanowaniem udzielała się innym.

W roku 2000 pełniłem funkcję organizatora XXIII Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych, Andrzej był wiceprzewodniczącym delegacji polskiej. Przez tydzień, zakwaterowani w jednym pokoju na zamku w Baranowie Sandomierskim, dyskutowaliśmy o zadaniach, olimpiadzie, nauczaniu matematyki… no i o brydżu.

Był znakomitym brydżystą. Ja grywałem wyłącznie amatorsko. Przez ponad 20 lat spotykaliśmy się wielokrotnie na finałach olimpijskich, Szkołach Matematyki Poglądowej czy różnych konferencjach. Często wykorzystywaliśmy nawet krótkie przerwy pomiędzy wykładami na kilka rozdań brydża. Był i pozostanie dla mnie wzorem wyrozumiałości i opanowania. Nawet po ewidentnym moim błędzie potrafił ze spokojem i uśmiechem powiedzieć: „no cóż, spróbowałeś i nie wyszło”. Ostatnio wiele godzin spędzaliśmy na brydżu on-line. Kiedyś, po dwóch kolejnych przegranych rozdaniach lekko poirytowany napisałem na czacie: „skoro nie umiemy grać tą konwencją, to może jej nie grajmy”. Andrzej natychmiast rozbrajająco i ze spokojem odpisał: „dlaczego mnie mieszasz do tego?”. No cóż, wszak rację miał. Na kolejny finał olimpiady przywiózł mi w prezencie książkę opisującą tę konwencję…

Będzie mi brakować tego wspaniałego poczucia humoru, delikatności, taktu i szacunku do drugiego człowieka.”



W starej szkole i starymi metodami… (skansen w Sanoku – XXIII APZ)

Zadania można sprawdzać wszędzie – przed wejściem na Połoninę Wetlińską (XXIII APZ)

Ten szacunek i życzliwość dla innych podkreśla w swoim wspomnieniu również Małgorzata Misztal z Wojskowej Akademii Technicznej:

„Znałam Andrzeja przede wszystkim z turniejów brydżowych. Nie dało się go nie lubić. Grał doskonale, a jednocześnie był życzliwy i wyrozumiały dla partnerów i przeciwników – co przy zielonym stoliku wcale nie jest oczywistym połączeniem! Od stolika Andrzeja i Krystyny zawsze odchodziłam z uśmiechem, niezależnie od tego, czy złapaliśmy właśnie *zero*, czy *maksa*…”

Brydż połączył też Andrzeja Fryszkowskiego z Władysławem Wieczorkiem z Wydziału Chemicznego PW:

„Andrzeja poznałem pod koniec lat 90., kiedy obaj pełniliśmy funkcje prodziekanów ds. kształcenia. Jednakże nasza prawdziwa znajomość i przyjaźń datuje się od czasów, gdy wyjeżdżaliśmy z rodzinami do ośrodka wypoczynkowego PW w Sarbinowie Morskim. Poranne ćwiczenia gimnastyczne, wycieczki plażą do Chłopów i Gąsek, wspólne kąpiele w zimnym Bałtyku, ale przede wszystkim wieczorne sesje brydżowe cementowały naszą znajomość. Andrzej był bez wątpienia inicjatorem i propagatorem sesji brydżowych. Tradycją stały się mecze Wydziału MiNI kontra reszta Politechniki. Corocznie przegrywaliśmy z kretesem i stawaliśmy się fundatorami wspólnego wyjścia do lokalnej cukierni, które kończyło turnus brydżowy. Efektem tych wakacyjnych eskapad była reaktywacja klubu brydżowego PW *Wektor* i coroczne turnieje brydżowe rozgrywane w Dużej Auli PW z okazji Święta Politechniki oraz Juwenaliów. Turnieje te, najpierw o charakterze lokalnym, z czasem uzyskały status Grand Prix Mazowsza o puchar JM Rektora Politechniki Warszawskiej. Andrzej z ogromnym entuzjazmem organizował te zawody. Mam nadzieję, że ich tradycja zostanie utrzymana, mimo że Andrzeja nie ma już wśród nas. Dzięki tym turniejom poznałem wielu wspaniałych ludzi reprezentujących kilka pokoleń związanych z Politechniką.

Z sarbinowskim brydżem, obok wątku politechnicznego, wiąże się także mój wątek rodzinny. Otóż Andrzej odkrył talent brydżowy u mojej córki Ewy, która z powodu braków kadrowych w zespole Politechniki któregoś roku została członkiem naszego zespołu. Tak więc teza tego krótkiego wspomnienia o moim nieodżałowanym przyjacielu, Profesorze Andrzeju Fryszkowskim, ma wymiar zarówno politechniczny, jak i rodzinny.”

Andrzej całym swoim życiem, pracą naukową i działalnością na rzecz edukacji matematycznej zapisał się na kartach historii polskiej matematyki.

Profesor Andrzej Fryszkowski na zawsze pozostanie w naszej pamięci!

Redagowały Barbara ROSZKOWSKA-LECH i Renata JURASIŃSKA