



Gdzie się podziały tamte funkcje...

Bartłomiej BZDEGA

... gdzie te dziedziny, gdzie tamten świat?

Rozwiązywanie olimpijskich równań funkcyjnych zwykle polega na przejściu od ogółu do szczegółu – jeśli poszukiwane funkcje mają spełniać dane równanie dla wszystkich, powiedzmy, $x, y \in \mathbb{R}$, to w miejsce x i y możemy podstawić dowolne liczby rzeczywiste, a nawet dowolne wyrażenia, które przyjmują wartości rzeczywiste. Najlepiej to ilustruje poniższy przykład.

Zadanie. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y .

Rozwiązanie. Niech $c = f(0)$. Podstawiając $x = y = 0$, otrzymamy

$$f(f(0) - 0) = f(0) + f(f(0) - f(0)) + 0,$$

czyli $f(c) = f(f(0)) = 2f(0) = 2c$. Po podstawieniu $x = 0$ i $y = c$ mamy

$$f(f(0) - c) = f(0) + f(f(c) - c) + 0,$$

co w świetle równości $f(0) = c$ i $f(c) = 2c$ daje $c = 3c$, czyli $c = 0$. Udowodniliśmy więc, że $f(0) = 0$. Następnie, podstawiając $x = 0$, otrzymamy

$$f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0,$$

co po uproszczeniu i wykorzystaniu równości $f(0) = 0$ daje $f(-y) = f(f(y))$.

W tej równości y jest dowolne, więc również $f(-x) = f(f(x))$. Wreszcie, podstawiając $y = f(x)$, otrzymujemy

$$f(f(x) - f(x)) = f(f(f(x)) - f(-x)) + x,$$

co na mocy ostatnio dowiedzionej równości sprowadza się do $0 = f(x) + x$, czyli $f(x) = -x$. Trzeba jeszcze sprawdzić, czy ta funkcja spełnia zadane równanie.

Należy więc sprawdzić równość

$$-(-x - y) = -x - (-y - (-(-x))) - x,$$

która jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y . Zatem dane równanie spełnia funkcja $f(x) = -x$ i tylko ona.

Podstawienie $y = f(x)$ nie było przypadkowe. Po lewej stronie równości mamy wyrażenie $f(f(x) - y)$, które sprowadza się wówczas do $f(0) = 0$. Ogólnie, należy szukać takich podstawień, które pozwolą, dzięki wcześniej zdobytym informacjom, nieco uprościć rozwiązywane równanie. Na początku wygląda to jak metoda prób i błędów, ale po rozwiązaniu kilku takich zadań można nabrać nieco intuicji. Sprawdzenie, czy otrzymana funkcja spełnia zadane równanie, jest konieczne – ma ona je spełniać dla wszystkich par (x, y) , a otrzymaliśmy ją, korzystając tylko z pewnych szczególnych par.

Na koniec wymienię kilka najczęściej spotykanych błędów, których należy się wystrzeżać:

- Podstawianie $f(x) = ax + b$ (lub podobne) do równania funkcyjnego, następnie obliczanie a i b – jest to błąd, ponieważ wtedy wyznaczymy jedynie funkcje liniowe.
- Wnioskowanie, że jeśli $f(A) = f(B)$ dla pewnych liczb/wyrażeń A i B , to $A = B$. Tak można robić tylko wtedy, gdy dana funkcja jest różnowartościowa.
- Zakładanie, że dla ustalonego y_0 z przeciwdziedziny istnieje takie x , że $f(x) = y_0$. Tak można robić tylko wtedy, gdy wiemy, że funkcja f osiąga wartość y_0 dla jakiegoś argumentu.

Zadania. W każdym zadaniu należy wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dane równanie dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ oraz ewentualnie dopisane założenie.

- $yf(x - 1) - xf(y - 1) = f(x - y)$.
- $f(x) + f(y) = x^2 + xy + y^2$.
- $f(xf(y)) = f(xy) + x$.
- $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.
- $f(f(x) + y) = f(f(y)) + x$.
- $f(f(x) - y) + f(f(y) - x) = 0$, f – różnowartościowa.
- $f(x + f(x + y)) = f(x - y) + f(x)^2$.
- $f(f(x) - y) + f(x + y) = 0$, f – nierosnąca.

Wskazówki do zadań
 1. Po podstawieniu $y = 0$ dostaniemy wzór $f(x) = ax$ dla pewnej liczby rzeczywistej a .
 2. Dla $y = 0$ otrzymamy wzór $f(x)$.
 3. Dla $y = 0$ otrzymamy wzór $f(x)$.
 4. Po podstawieniu $x = y$ możemy wywnioskować, że jeśli $x \neq 0$, to $f(x) \in \{0, 1\}$. Jeżeli $f(x) = 0$ dla pewnego $x_0 \neq 0$, to dla każdego x otrzymamy $f(x) = 0$.
 5. Biorąc $y = 0$, dostaniemy wzór $f(x)$.
 6. Dla $x = y$ otrzymamy $f(x)$.
 7. Podstawiając $x = c$, $y = -c$, otrzymamy $f(c) = 0$. Dalej dla $y = c - \frac{1}{2}$ mamy $f(\frac{1}{2}) = f(x)$ dla $x = c - \frac{1}{2}$.
 8. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$.
 9. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 10. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 11. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 12. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 13. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 14. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 15. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 16. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 17. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 18. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 19. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 20. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 21. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 22. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 23. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 24. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 25. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 26. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 27. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 28. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 29. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 30. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 31. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 32. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 33. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 34. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 35. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 36. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 37. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 38. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 39. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 40. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 41. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 42. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 43. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 44. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 45. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 46. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 47. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 48. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 49. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 50. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 51. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 52. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 53. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 54. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 55. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 56. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 57. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 58. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 59. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 60. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 61. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 62. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 63. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 64. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 65. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 66. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 67. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 68. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 69. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 70. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 71. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 72. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 73. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 74. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 75. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 76. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 77. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 78. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 79. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 80. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 81. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 82. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 83. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 84. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 85. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 86. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 87. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 88. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 89. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 90. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 91. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 92. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 93. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 94. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 95. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 96. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 97. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 98. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 99. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.
 100. Wstawiając $x = 0$, przekształcimy się, że $f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0$.