Czy $\frac{dy}{dx}$ to iloraz dy i dx?

Michał MIŚKIEWICZ

> If you have built castles in the air, your work need not be lost; that is where they should be. Now put the foundations under them.
>
> Henry David Thoreau

Z mojego skromnego doświadczenia dydaktycznego wynika, że na pytanie postawione w tytule najbezpieczniej jest odpowiedzieć **nie***. Pochodna funkcji $y(x)$ definiowana jest jako granica ilorazów

*Zgodnie z regułą, że odpowiedź na tytułowe pytanie zawsze jest przecząca.

$$(\star) \qquad \frac{dy}{dx}(x) := \lim_{x' \to x} \frac{y(x') - y(x)}{x' - x},$$

ale sama ilorazem nie jest. A przynajmniej nie w taki sposób, że jest ilorazem granic licznika i mianownika. Przypomnijmy – wzór na granicę ilorazu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

zachodzi, gdy ciągi a_n i b_n są zbieżne, przy czym granica b_n nie jest zerowa. To ostatnie zastrzeżenie służy wykluczeniu dzielenia przez zero, a z takim właśnie przypadkiem mamy do czynienia w definicji pochodnej. Gdyby dy było granicą $y(x') - y(x)$, a dx granicą $x' - x$, to jedno i drugie byłoby po prostu zerem.

Nie zmienia to faktu, że pochodna jako granica ilorazów dziedziczy wiele ich własności. Prawdziwe są m.in. wzory na pochodną złożenia i na pochodną funkcji odwrotnej:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

które sugerują, że w wielu przypadkach $\frac{dy}{dx}$ zachowuje się jak iloraz. Uzasadnia to na przykład metodę rozwiązywania równań różniczkowych *o zmiennych rozdzielonych*, czyli równań postaci $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, gdzie funkcje f i g są z góry zadane. Symbolicznie często zapisuje się ją jako ciąg przejść:

Przykład zastosowania tej metody:
$\frac{dy}{dx} = -2xy,$
$\frac{dy}{y} = -2x dx,$
$\int \frac{dy}{y} = \int (-2x) dx,$
$\ln|y| = -x^2 + A,$
$y = Be^{-x^2}.$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx.$$

Użyta w tym zapisie pośrednia forma $\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$ może budzić kontrowersje, ponieważ sugeruje, że dx i dy są bytami, które można porównywać. Najprościej jest jednak uznać, że to tylko mnemotechnika, użyteczna zarówno w rozwiązywaniu równań różniczkowych, jak i w zapamiętaniu wspomnianych wyżej wzorów na pochodne, a przy tym zawierająca cenną intuicję dotyczącą samej definicji pochodnej. Równocześnie niech napisy $\frac{dy}{dx}$ i $\int f(x) dx$ pozostaną właśnie *napisami*, oznaczającymi odpowiednio pochodną $y'(x)$ i funkcję pierwotną (funkcję $F(x)$ spełniającą $F'(x) = f(x)$) – nic nas nie zmusza do przypisywania sensu pojedynczym składowym tych napisów.

I na tym można spokojnie zakończyć lekturę niniejszego tekstu... chyba, że chce się zobaczyć drugie dno.

Tło historyczne

Pojęcie pochodnej pojawiło się w XVII wieku za sprawą Isaaca Newtona (1642–1727) i Gottfrieda Leibniza (1646–1716). Do zapisu pochodnej stosowano (i stosuje się nadal) różne symbole, m.in. y', $\dot{y}$, $\frac{dy}{dx}$. To ostatnie oznaczenie pochodzi od Leibniza i oddaje jego rozumienie pochodnej jako ilorazu nieskończenie małych wielkości dy i dx. Leibniz wprowadził bowiem liczby dodatnie nieskończenie małe, to znaczy mniejsze od odwrotności wszystkich liczb naturalnych. Zauważmy, że gdyby $\varepsilon > 0$ było taką właśnie liczbą spełniającą $\varepsilon < \frac{1}{n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to jej odwrotność $\frac{1}{\varepsilon}$ byłaby górnym ograniczeniem zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Tymczasem tzw. *aksjomat Archimedesa*, o którym jeszcze napiszę w dalszej części, mówi dokładnie tyle, że takie ograniczenie nie istnieje, więc w *naszej* matematyce nie ma miejsca na liczby nieskończenie małe.

Dalszy rozwój matematyki nie potoczył się torem wytyczonym przez Leibniza. Chociaż wprowadzona przez niego notacja się utrzymała, to w XIX wieku ścisłe pojęcie pochodnej oparto na granicy, tak jak w ($\star$). Samą granicę z kolei zdefiniowano poprzez znany uczniom warunek z epsilonem i deltą (ε i δ), co ostatecznie odarło tę dziedzinę z magii wielkości infinitezymalnych.

Ale nie jest to koniec historii – w latach 60. ubiegłego wieku Abraham Robinson (1918–1974) ugruntował idee Leibniza, budując teorię liczb i funkcji hiperrzeczywistych uwzględniającą liczby nieskończenie małe. Stworzoną w ten sposób teorię nazywa się *analizą niestandardową*, dla odróżnienia od analizy – no cóż – standardowej. Aksjomat Archimedesa jest w tej teorii niespełniony, ale za to pochodną można ściśle definiować jako iloraz wielkości nieskończenie małych. Mianowicie liczbę S nazwiemy pochodną $y(x)$ w x, jeśli S jest *zaokrągleniem do najbliższej liczby rzeczywistej* (*standard part*) wartości $\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$ dla każdej infinitezymalnej liczby $\Delta x \neq 0$. Przykładowo, dla $y = x^2$ mamy

$$\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

a zaokrągleniem do liczby rzeczywistej jest $2x$ (niezależnie od Δx). Historię i obecny stan tego fragmentu matematyki można lepiej poznać dzięki źródłom podanym na marginesie.

Literatura:
M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki.*
L. Arkeryd, *Analiza niestandardowa*, Δ^{7}_{04}.
T. Tao, *Nonstandard analysis as a completion of standard analysis*, artykuł dostępny online.
H. J. Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, książka dostępna online.

Różniczka na ratunek

A czy w standardowej analizie można jakoś usprawiedliwić $\frac{dy}{dx}$ jako iloraz? W duchu stawiania fundamentów pod wiszącymi w powietrzu zamkami moglibyśmy to zrobić, definiując dy i dx jako liczby równe odpowiednio $y'(x)$ i 1. Skoro do tej pory nie przypisaliśmy tym obiektom żadnego innego znaczenia, to wolno. I nikt nie zaprzeczy, że wówczas iloraz $\frac{dy}{dx}$ jest równy pochodnej, tyle że takie podejście jest zupełnie jałowe. Przekonamy się jednak, że nie jest ono dalekie od formalizmu *form różniczkowych*.

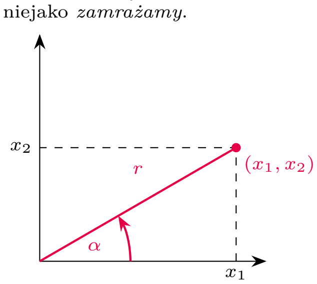
Meandry wielu wymiarów

W tym celu dodajmy jeden wymiar i rozważmy funkcję $y\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Mówimy wtedy o funkcji *dwóch zmiennych*, gdyż punkt w $\mathbb{R}^2$ możemy reprezentować jako parę liczb rzeczywistych (x_1, x_2). Jeśli ustalimy wartość x_1, to pozostaje nam funkcja jednej zmiennej $x_2 \mapsto y(x_1, x_2)$ – jej pochodną nazywamy *pochodną cząstkową* funkcji y względem zmiennej x_2:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lim_{x_2' \to x_2} \frac{y(x_1, x_2') - y(x_1, x_2)}{x_2' - x_2}.$$

Przykładowo, dla $y = x_1 x_2^2$ mamy $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_1x_2$ – na potrzeby obliczania pochodnej cząstkowej po x_2 zmienną x_1 niejako *zamrażamy*.

Istnieją też inne sposoby reprezentacji punktów $\mathbb{R}^2$. Czytelnik na pewno spotkał się ze *współrzędnymi biegunowymi* (r, α), w których r mierzy długość promienia wodzącego poprowadzonego z początku układu współrzędnych, a α odchylenie tego promienia od dodatniej półosi OX_1 (zob. wzory na marginesie). Z wyjątkiem początku układu i ewentualnej niejednoznaczności doboru α, współrzędne (r, α) w niczym nie ustępują współrzędnym (x_1, x_2). Możemy więc myśleć o y jako o funkcji $y(r, \alpha)$ i definiować jej pochodne cząstkowe $\frac{\partial y}{\partial r}$ i $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ wszędzie poza początkiem układu.



$x_1 = r\cos\alpha$
$x_2 = r\sin\alpha$
$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
$\alpha = \operatorname{arc\,tg}(x_2/x_1)$ (nie zawsze)

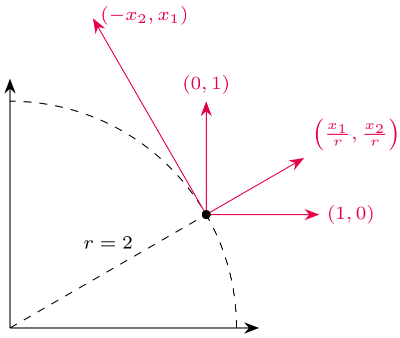
Skupmy teraz uwagę na dwóch funkcjach, x_2 oraz α, przyporządkowujących każdemu punktowi jego drugą współrzędną, odpowiednio kartezjańską lub biegunową. Postępując jak poprzednio, obliczamy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(r\sin\alpha) = r\cos\alpha,$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\operatorname{arc\,tg}(x_2/x_1)\right) = \frac{1}{1+(x_2/x_1)^2}\cdot\frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Drugi wynik można przedstawić w formie $\frac{\cos\alpha}{r}$ i widać wtedy, że $\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}$ nie jest równe $\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha}\right)^{-1}$. Intuicja – przynajmniej w tak naiwnym wydaniu – nas zawiodła.

Adepci studiów matematycznych i technicznych znają rozwiązanie tego problemu – *różniczkę*. Różniczka y w punkcie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem

Uwaga terminologiczna: wzór ($\star\star$) nie jest definicją różniczki, tylko *pochodnej kierunkowej*. Wiadomo jednak, że jeśli funkcja y posiada różniczkę, to ($\star\star$) jest w mocy.



liniowym $dy_{\mathbf{p}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, które na wektorze $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ przyjmuje wartość

$$dy_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{y(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) - y(\mathbf{p})}{t}. \tag{$\star\star$}$$

Wspomniane wcześniej pochodne cząstkowe dają się wyrazić jako szczególne przypadki powyższych pochodnych kierunkowych:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = dy(1,0), \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = dy(0,1), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = dy\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right), \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = dy(-x_2, x_1),$$

choć w dwóch ostatnich przypadkach nie jest to takie oczywiste. Warto jednak odnotować, że pojawiające się tu wektory odpowiadają kierunkom, w których porusza się punkt, gdy ustali się jedną współrzędną, a zaburzy drugą.

Różniczki są przekształceniami liniowymi, więc jako takie można je dodawać, mnożyć przez skalary, a przy odpowiednich warunkach również składać – to ostatnie jest odpowiednikiem mnożenia i pojawia się naturalnie przy obliczaniu różniczki złożenia. A czy można dzielić, jak w napisie $\frac{dy}{dx}$?

Może się zdarzyć na przykład, że w danym punkcie $dz_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = 2dy_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, powiedzielibyśmy wtedy, że $\frac{dz_{\mathbf{p}}}{dy_{\mathbf{p}}} = 2$. To jednak rzadki przypadek – we wcześniej rozważonym przykładzie mamy

$$dx_2(v_1, v_2) = v_2, \qquad d\alpha(v_1, v_2) = \frac{x_1 v_2 - x_2 v_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

różniczki te nie są więc proporcjonalne (poza osią OX_1).

Dzielenie różniczek w jednym wymiarze

Dobra wiadomość! W przypadku jednowymiarowym wszystkie przekształcenia liniowe $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są proporcjonalne, więc zawsze można je dzielić (chyba że dzielimy przez zero, to wtedy nie). W szczególności z definicji ($\star\star$) wynika

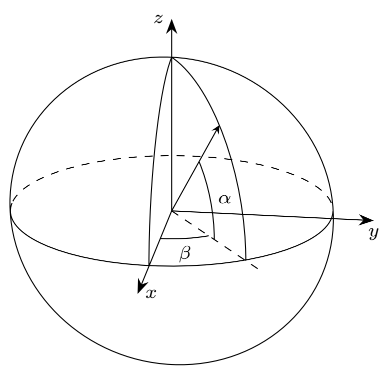
$$dy_x(v) = y'(x)v, \qquad dx_x(v) = v, \qquad \frac{dy_x(v)}{dx_x(v)} = y'(x) \quad \text{dla } x, v \in \mathbb{R},\ v \neq 0.$$

Różniczka pozwala zatem zarówno przypisać sens symbolom dx, dy, jak i nadać $\frac{dy}{dx}$ walory ilorazu. Jest nawet lepiej – po wykonaniu pewnej pracy (nadaniu $\mathbb{R}^2$ struktury *rozmaitości gładkiej*) można pozbyć się zależności definicji ($\star\star$) od współrzędnych (x_1, x_2), zależności kryjącej się w dodawaniu wektorów w $\mathbb{R}^2$.

Tak samo w $\mathbb{R}$! Jeśli funkcja $z \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma niezerującą się różniczkę, to można ją przyjąć jako współrzędną w miejsce x, tak samo jak współrzędne kartezjańskie można zamienić na biegunowe. Wtedy z konieczności porównanie różniczek dy i dz daje $dy = \frac{dy}{dz}dz$, przy czym $\frac{dy}{dz}$ jest pochodną y po z. W rezultacie

$$dy = \frac{dy}{dz}dz, \quad dz = \frac{dz}{dx}dx \quad \Longrightarrow \quad dy = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}dx,$$

i wzór na pochodną złożenia okazał się faktem arytmetycznym. Czytelnik może się czuć oszukany, i słusznie – tak naprawdę wzór na pochodną złożenia jest już zakodowany we wspomnianej strukturze rozmaitości, która pozwoliła nam *oderwać różniczkę od współrzędnych.* Jeśli udało mi się Czytelnika zaciekawić, to polecam zagłębić się w geometrię różniczkową – dziedzinę zajmującą się wolnym od współrzędnych (przynajmniej w większości) opisem obiektów geometrycznych. A na początek proponuję zastanowić się nad poniższymi problemami:



Współrzędne sferyczne:
$x = \cos\alpha \cos\beta$
$y = \cos\alpha \sin\beta$
$z = \sin\alpha$

Zadanie 1. Punkty na sferze jednostkowej $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ można opisywać przez geograficzną szerokość α i długość β (wzorami jak na marginesie). O funkcji $f \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ można wtedy myśleć jako o funkcji $f(\alpha, \beta)$ i obliczać jej pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial \beta}$. Z drugiej strony, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ zadaje opis sfery (lub przynajmniej jej połowy) parą (x, y), możemy więc też liczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Jak opisać zależność między jednym a drugim zestawem pochodnych?

Zadanie 2. Jak zmodyfikować definicję ($\star\star$), by miała sens dla $f \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$? Jak wyrazić pochodne cząstkowe z poprzedniego zadania w terminach różniczki? *Wskazówka*: ograniczyć się do wektorów $\mathbf{v}$ stycznych do $\mathbb{S}^2$ w $\mathbf{p}$, a następnie poprawić $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$, by punkt ten leżał na sferze.