

# Równanie Keplera w Principiach Newtona

\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Johannes Kepler (1571–1630)

Grzegorz ŁUKASZEWICZ\*

W artykule *Drugie prawo Keplera i owale Newtona. Kontrowersje wokół Lematu XXVIII w Principiach* ( $\Delta_{20}^{10}$ ) naszkicowaliśmy problem wyznaczania ruchu ciał (np. planet) po ustalonych krzywych i w polu sił centralnych, którym zajmował się Isaac Newton w *Principiach* [*O tym, jak należy znajdować ruch po zadanej orbicie*, Paragraf VI, Ks. 1]. Takie ruchy spełniają drugie prawo Keplera [*Principia*, Tw. 1, Ks. 1] i nazywane są keplerowskimi.

Dominującym tematem była przestępna zależność między polem sektora zakreślonego przez promień wodzący planety i czasem przebiegu planety po orbicie. Powiedzieliśmy, że w przypadku ruchu po orbicie eliptycznej równaniem opisującym tę zależność jest *równanie Keplera*

$$(1) \quad M = E - \epsilon \sin E.$$

W tym artykule powracamy do drugiego prawa Keplera i zmagania Newtona ze znalezieniem położenia  $P$  planety na orbicie eliptycznej w dowolnej chwili  $t$ , liczonej od przejścia przez perycentrum  $Q$ .

Przyjmijmy, że półosie elipsy są równe  $a, b$ ,  $b < a$  i że czas  $T$  pełnego obiegu planety po trajektorii (okres obiegu) jest znany. Relacja wiążąca położenie  $P$  i czas  $t$  zadana jest równaniem (1), gdzie  $M$  jest *anomalią średnią* (zdefiniowaną niżej),  $E$  jest *anomalią mimośrodkową* (zob. rys. 3), a  $\epsilon$  jest *mimośrodem orbity*.

Z definicji:  $M = \frac{2\pi}{T}t$ , gdzie czas  $t$  jest związany drugim prawem Keplera z polem  $S$  sektora elipsy zakreślonego przez promień wodzący planety, otrzymujemy

$$(2) \quad \frac{S}{t} = \frac{\pi ab}{T}.$$

Z powyższych wzorów widać, że relacje wiążące pole zakreślonego w czasie  $t$  sektora elipsy, a także sam czas  $t$  z *anomalią mimośrodkową*  $E$ , są przestępne. Obliczenie *anomalii mimośrodkowej* można uznać za wskazanie miejsca planety na orbicie (patrz rys. 3). Gdy znane jest  $E$ , obliczenie współrzędnych punktu  $P$  sprowadza się do prostego rachunku. Chcąc obliczyć  $E$  w danej chwili czasu  $t$ , obliczamy  $M$  i dalej obliczamy  $E$  z równania Keplera. Dla tego ostatniego obliczenia Newton zastosował metodę aproksymacji, którą obecnie nazywamy metodą Newtona–Raphsona.

Poniżej przybliżymy bardziej szczegółowo równanie Keplera według *Principiów*. Pokażemy:

1. Geometryczne wyprowadzenie równania.
2. Podejście analogowe, relację do ruchu po krzywej cykloidalnej.
3. Metodę aproksymacji rozwiązania.

Ad 1. W dowodzie odwołujemy się do rysunku na marginesie. Niech  $S$  będzie polem sektora  $FQP$ . Naszym celem jest wyrażenie  $S$  przez parametry  $a, b$  elipsy i kąt  $E$  określający sektor  $FQP$ . Pokażemy, że

$$(3) \quad S = \frac{1}{2}ab\{E - \epsilon \sin E\},$$

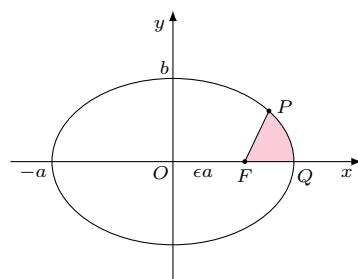
gdzie  $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  jest mimośrodem elipsy. Korzystając z drugiego prawa Keplera (2) i definicji  $M$ , przekształcamy łatwo powyższe równanie do postaci (1).

Zauważmy, że  $S$  jest równe sumie pól trójkąta i wycinka elipsy,

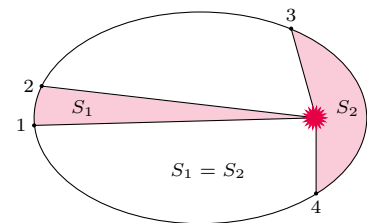
$$(4) \quad S = \Delta FNP + NQP.$$

Ponieważ  $OF = \epsilon a$ , nie mamy problemu z obliczeniem pola trójkąta. Chcąc obliczyć pole  $NQP$  wycinka elipsy, wykorzystamy konstrukcję pomocniczą, czyli okrąg o promieniu  $a$  opisany na naszej elipsie. Łatwiej nam będzie obliczyć pole wycinka  $NQP'$  koła i skorzystać z własności skalowania  $NQP = \frac{b}{a}NQP'$ . Patrząc na rysunek, widzimy, że  $NQP' = OQP' - \Delta ONP'$ . Zatem

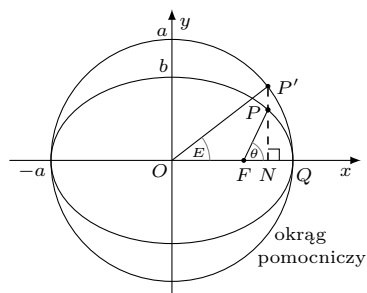
$$(5) \quad S = \Delta FNP + \frac{b}{a}\{OQP' - \Delta ONP'\}.$$



Sektor  $FQP$  o polu  $S$  i punkt  $P$



Ilustracja drugiego prawa Keplera

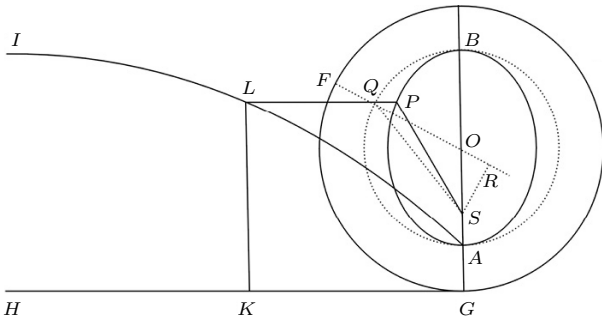


Konstrukcja rozwiązania wykorzystująca równanie Keplera

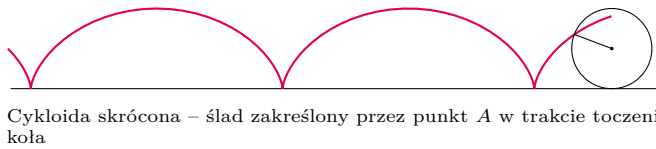
Ponieważ  $\triangle FNP = \frac{1}{2}ab(\cos E - \epsilon) \sin E$ ,  $OQP' = \frac{E}{2\pi}\pi a^2 = \frac{E}{2}a^2$ ,  
a  $\triangle ONP' = \frac{1}{2}a^2 \cos E \sin E$ , to zebrawszy te rachunki razem, otrzymujemy  
równanie (3). Dowód geometryczny podał sam Johannes Kepler w *Epitome  
Astronomiae Copernicanae*, Ks. V. Są też dowody analityczne, wychodzące  
wprost z biegunowej reprezentacji równania elipsy, gdzie sednem dowodu jest  
otrzymanie relacji pomiędzy kątem  $PFN$  występującym w równaniu elipsy  
i kątem  $E$  [Battin].

Ad 2. Dla oddania próbki klimatu *Principiów*  
przytoczymy tu oryginalny tekst Newtona  
(w tłumaczeniu polskim, patrz bibliografia).

„Teza XXXI. Zadanie XXIII. Mając dane ciało poruszające  
się po danej elipsie, należy wyznaczyć miejsce ciała na  
elipsie, które ono osiągnie w danym czasie.



Niech  $A$  będzie głównym wierzchołkiem,  $S$  ogniskiem,  
natomiast środkiem elipsy  $APB$ . Niech  $P$  będzie  
szukanym miejscem ciała. Przedłużamy  $OA$  do punktu  $G$   
tak, aby  $OG$  było w stosunku do  $OA$  takim jak  $OA$   
do  $OS$ . Następnie konstruujemy prostą  $GH$  prostopadłą  
do osi  $OA$ . Z kolei wokół środka  $O$  konstruujemy okrąg  
 $GEF$  o promieniu  $OG$ . Przypuśćmy następnie, że koło  
 $GEF$  toczy się po linii  $GH$ , obracając wokół własnej  
osi po prostej  $GH$  jako podstawie, oraz w międzyczasie  
punkt  $A$  opisuje cykloidę  $ALI$ .



Cykloida skrócona – ślad zakreślony przez punkt  $A$  w trakcie toczenia  
koła

Po wykonaniu tej konstrukcji weźmy  $GK$  tak, aby  
jego stosunek do obwodu  $GEFG$  tego koła był równy  
stosunkowi czasu, w którym ciało, wychodząc z punktu  $A$ ,  
opisze łuk  $AP$  do czasu jego pełnego obiegu po elipsie.  
W punkcie  $K$  rysujemy prostą  $KL$  prostopadłą do  $GH$ ,  
przecinającą cykloidę w  $L$ . Następnie rysujemy prostą  $LP$   
równoległą do  $KG$ , przecinającą elipsę w punkcie  $P$ , który  
jest szukanym miejscem ciała.

Rzeczywiście. Konstruujemy półokrąg  $AQB$  o środku  
w punkcie  $O$  i promieniu  $OA$ . Następnie niech  $LP$  po  
przedłużeniu przecnie łuk  $AQ$  w  $Q$ . Tworzymy proste  
 $SQ$ ,  $OQ$ . Niech  $OQ$  przecina łuk  $EFG$  w  $F$  oraz niech  $SR$   
będzie prostopadłe do  $OQ$ . Pole  $APS$  jest proporcjonalne  
do  $AQS$ , tzn. do różnicy między polem wycinka  $OQA$   
i trójkąta  $OQS$  lub do różnicy iloczynów  $\frac{1}{2}OQ \cdot AQ$   
i  $\frac{1}{2}OQ \cdot SR$ , tzn. (ponieważ  $\frac{1}{2}OQ$  jest ustalone) do  
różnicy między łukiem  $AQ$  i odcinkiem  $SR$ . Wobec tego  
pole  $APS$  (ponieważ stosunki:  $SR$  do sinusa łuku  $AQ$ ,  
 $OS$  do  $OA$ ,  $OA$  do  $OG$ ,  $AQ$  do  $GF$  i (rozdzielnie)  $AQ -$   
 $SR$  do  $GF$  – sinus łuku  $AQ$  są wszystkie równe) jest jak  
 $GK$ , to jest jak różnica pomiędzy łukiem  $GF$  i sinusem  
łuku  $AQ$ . Q.E.D.”

Powyższy wywód zawiera wyprowadzenie równania  
Keplera przytoczone wcześniej, jak również jego  
parametryzację geometryczną, wiążącą cykloidalny  
ruch punktu  $Q$  z orbitalnym ruchem punktu  $P$ , gdy  
okrąg toczy się wzdłuż osi  $OX$  z jednostajną prędkością  
 $V = \frac{2\pi \cdot OG}{T}$ . Zainteresowanym proponujemy rozszyfrowanie  
tekstu Newtona, będące sporym wyzwaniem. Stosowne  
objaśnienia można znaleźć w [Chandrasekhar].

Ad 3. Metoda Newtona aproksymacji rozwiązania jest najprostszym przykładem  
jego metody odwracania szeregów [Battin]. Załóżmy, że mamy równanie  $f(x) = 0$ ,  
gdzie funkcja  $f$  ma pierwszą pochodną  $f'$ . Niech  $\xi$  będzie pierwiastkiem tego  
równania. Wybieramy punkt  $x_0$  i tworzymy ciąg  $x_1, x_2, x_3, \dots$  gdzie

$$(6) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Zbieżność tak utworzonego ciągu zależy of funkcji  $f$  i wyboru punktu  
początkowego  $x_0$ .

Zobaczymy, jak ta metoda działa w przypadku równania Keplera. Równanie to  
ma dla każdego  $M$  tylko jedno rozwiązanie  $E$ , ponadto dla  $k\pi \leq M < (k+1)\pi$   
mamy  $k\pi - M \leq E < (k+1)\pi - M$ .

Określamy  $f(E) = E - \epsilon \sin E - M$ . Mamy wtedy

$$(7) \quad E_{k+1} = E_k + \frac{M - M_k}{1 - \epsilon \cos E_k},$$

gdzie  $M_k = E_k - \epsilon \sin E_k$ . Można pokazać, że

$$(8) \quad |E_{k+1} - E| \leq \frac{\epsilon}{2(1 - \epsilon)} |E_k - E|^2.$$

Widać, że w przypadku planet w układzie słonecznym, dla których  $\epsilon$  jest bardzo małe, aproksymacje  $E_k$  bardzo szybko zbiegają do rozwiązania równania Keplera. Newton, a przedtem Kepler, zauważają, że w większości przypadków wystarczy wziąć tylko dwa wyrazy (dla uzyskania akceptowalnych przybliżeń obserwacyjnych).

Ciekawa historia metody Newtona–Raphsona (metoda ta występuje też pod innymi nazwami) jest opisana w artykule [Kollerstrom], a także w artykule *Przez wieki z metodą Newtona* ( $\Delta_{21}^9$ ).

Inna prosta metoda aproksymacji to *metoda kolejnych przybliżeń*. Określamy np.  $E_0 = 0$ , a dalej

$$(9) \quad E_1 = M + \epsilon \sin E_0, \quad \dots, \quad E_{k+1} = M + \epsilon \sin E_k, \dots$$

Co prawda ciąg  $E_0, E_1, E_2, E_3, \dots$  też zbiega do rozwiązania równania Keplera, ale wolniej. Na przykład, jeśli za parametry weźmiemy (z Wikipedii) dane dla Jowisza:  $M = 20,02^\circ$  oraz  $\epsilon = 0,0489$ , to dostaniemy następujące wyniki:

Numer iteracji $k$	Metoda Newtona	Metoda kolejnych przybliżeń
0	0,0000000000000000	0,0000000000000000
1	0,3673797878764218	0,3494149162492648
2	0,3669591982813706	0,3661557401527573
3	0,3669591966542151	0,3669225177320731
4		0,3669575224562361
5		0,3669591202364838
6		0,3669591931661761
7		0,3669591964950058
8		0,3669591966469481
9		0,3669591966538834
10		0,3669591966542000

(wytuściliśmy te cyfry wyniku, które są dokładne).

Dotychczas znaleziono wiele metod aproksymacji rozwiązania tego najsłynniejszego równania przestępnego, z różną dokładnością względem  $E$ . Wciąż podawane są nowe metody [Colwell].

Oba artykuły, z  $\Delta_{20}^{10}$  i niniejszy, pozwalają ujrzeć geniusz Newtona i siłę *Principiów*, dzieła będącego niedościgłym wzorem publikacji w dziedzinie, którą dziś moglibyśmy nazwać matematyką stosowaną czy fizyką teoretyczną (okropne nazwy wskazujące na współczesną schizofrenię naukową), a kiedyś nazywało się dużo właściwiej, mianowicie *filozofią naturalną*.

Korzystając z drugiego prawa Keplera, prostych metod geometrii klasycznej i bardzo subtelnego argumentu topologicznego, wyprzedzającego swoją epokę o około 200 lat, Newton rozwiązał *niezwykle istotny problem astronomiczny* swojej epoki. Pokazując *ograniczenia dla dokładnych obliczeń liczbowych*, znalazł rozwiązanie *geometryczne* i *analogowe* oraz zaproponował szybko zbieżną *aproksymację numeryczną* rozwiązania metodą numeryczną stosowaną do dnia dzisiejszego.

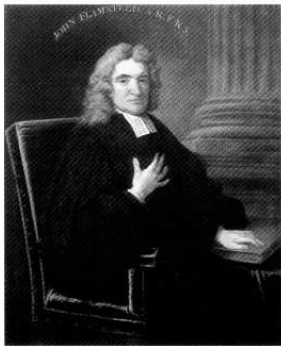
Czego już nie widać w tych artykułach, Newton konfrontował swoje teorie z danymi doświadczalnymi, w tym wypadku z tablicami astronomicznymi Astronoma Królewskiego Johna Flamsteeda (uciekając się nawet do odebrania mu siłą jego niedokończonych jeszcze obliczeń).

Jeśli do tego dodać, że pracował samotnie, pisząc gęsim piórem przy świeczce, w barbarzyńskich czasach wojen religijnych i epidemii, w których los, a nawet życie człowieka wisiały na włosku (Newton był heretykiem, m.in. nie uznawał Trójcy Świętej, co było uznawane za przestępstwo [Jerzy Kierul: *Newton*]), to narzucającą się najwłaściwszą naszą reakcją musi pozostać klasyczne *chapeau bas*.

Zauważmy, że

$$|E_{k+1} - E_k| \leq \epsilon |E_k - E_{k-1}|,$$

gdzie  $0 < \epsilon < 1$ , zatem zbieżność metody zapewniła zasada odwzorowań zwężających (twierdzenie Banacha o kontrakcji).



John Flamsteed (1646–1719)  
Pierwszy Astronom Królewski i założyciel  
Królewskiego Obserwatorium  
Astronomicznego w Greenwich

Literatura:

R. H. Battin: *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics. Inc., 1999.

S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader*, Oxford University Press Inc., New York 1995.

P. Colwell: *Solving Kepler's Equation Over Three Centuries*, Willmann-Bell, Inc., 1993.

Jerzy Kierul: *Kepler*, PIW, 2007.

Jerzy Kierul: *Newton*, PIW, 2010.

N. Kollerstrom: *Thomas Simpson and 'Newton's method of approximation': an enduring myth*, The British Journal for the History of Science, Volume 25, Issue 03, September 1992, 347–354.

I. Newton: *Matematyczne Zasady Filozofii Przyrody*, Copernicus Center Press, Kraków 2011.