Problem bankructwa z Talmudu

Oskar SKIBSKI

Konsultacja judaistyczna:
dr hab. Marzena Zawanowska, Wydział Historii, Uniwersytet Warszawski

Jedna z historii w Talmudzie Babilońskim (*Ketubot* 93a) opisuje następującą sytuację. Mężczyzna mający trzy żony umiera. W kontrakcie małżeńskim obiecał im kolejno 100, 200 i 300 zuz, czyli starożytnych srebrnych monet. Niestety, gdy umierał, jego majątek był zbyt mały, aby można było spełnić te obietnice. Jak sprawiedliwie rozdzielić majątek między żony?

W Talmudzie przedstawione są trzy warianty problemu oraz ich rozwiązania. Jeżeli majątek wynosił 100 monet, to żony powinny podzielić się nim po równo. Jeżeli wynosił 200 monet, to pierwsza żona powinna dostać ich 50, a pozostałe dwie po 75. Z kolei jeżeli majątek wynosił 300 monet, to pierwsza żona powinna dostać ich 50, druga 100, a trzecia 150.

Trzy warianty problemu bankructwa z Talmudu razem z rozwiązaniami.

	100	200	300
Żona 1 (100)	33,(3)	50	50
Żona 2 (200)	33,(3)	75	100
Żona 3 (300)	33,(3)	75	150

Rozwiązania te wydają się jednak – łagodnie mówiąc – dziwne. Podział po równo (jak przy 100 monetach) oraz podział proporcjonalny (jak przy 300) wydają się naturalne. Niezrozumiałe jest jednak to, czemu inaczej dzielimy 100 monet, a inaczej 300. A już kompletnie dziwny wydaje się podział 200 monet, który nie jest ani równy, ani proporcjonalny. O co więc tutaj chodzi?

To pytanie zadawali sobie badacze Talmudu przez prawie dwa tysiące lat. Wielu przedstawiało niezbyt przekonującą argumentację, a ci, którym nawet to się nie udało, sugerowali, że to błąd kopisty. Przełomem okazała się dopiero praca Roberta Aumanna (laureata Nagrody Nobla z ekonomii) oraz Michaela Maschlera z 1985 roku, którzy rozwiązali tę zagadkę: nie tylko znaleźli ogólną zasadę, która prowadzi do wspomnianych rozwiązań, ale także pokazali, że metoda ta jest sensowna i ma wiele pożądanych własności.

Robert J. Aumann, Michael Maschler. *Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud.* Journal of Economic Theory 36, 195-213 (1985).

Zanim opowiemy, jak podzielić cały majątek między wdowy, skupimy się na zadaniu łatwiejszym – na podzieleniu ubrań denata. *Spór o ubiór* (*Contested Garment*) to prostsza sytuacja, która także pojawia się w Talmudzie Babilońskim (*Baba Mecyja* 2a). Dwóch mężczyzn staje przed sądem, trzymając ubranie*. Pierwszy mówi „Całość jest moja”, a drugi – „Połowa jest moja”. Sędzia decyduje, aby pierwszemu mężczyźnie dać 3/4 ubrania, a drugiemu 1/4.

*Nie wiemy, jakie było to ubranie, ale aby dalsza część historii miała więcej sensu, lepiej wyobrażać sobie, że był to długi szal modlitewny, a nie jeansowe spodnie.

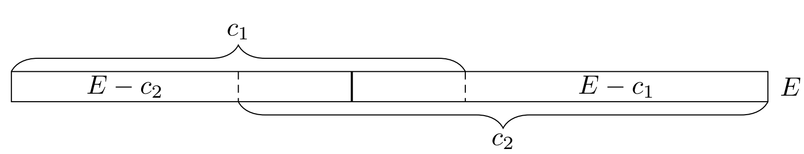
Ten podział uzasadnić możemy dość łatwo, nie ma zatem o co drzeć szat. Sędzia położył pewnie ubranie na stole i stwierdził, że do jego lewej połowy roszczenie wnoszą obaj mężczyźni, a do prawej wnosi tylko pierwszy z nich. Dał zatem tę prawą połowę pierwszemu mężczyźnie, a sporną lewą połowę podzielił po równo.

Rozpatrzmy przypadek ogólny. Niech $(E; c_1, c_2)$ oznacza spór, w którym wartość ubrania to E, a roszczenia to c_1 i c_2. Zakładamy tutaj, że $0 \leqslant c_1 \leqslant c_2$ oraz że suma roszczeń jest wyższa lub równa wartości ubrania: $E \leqslant c_1 + c_2$. Metoda podziału to zatem funkcja, która dla danego $(E; c_1, c_2)$ zwraca parę wypłat (x_1, x_2), które sumują się do E.

Przedstawione powyżej rozumowanie definiuje następującą metodę podziału (oznaczymy ją φ^*). Jeżeli $E - c_2$ jest nieujemne (do części ubrania druga osoba nie wnosi roszczenia), to ta część powinna trafić do pierwszej osoby. Analogicznie, jeżeli $E - c_1$ jest nieujemne, to powinno trafić do drugiej osoby. Resztę dzielimy po równo. Używając notacji $(x)_+ = \max\{x, 0\}$, dostajemy $\varphi^*(E; c_1, c_2) = (x_1^*, x_2^*)$, gdzie wypłata osoby i (przyjmując, że druga osoba to j) to

$$x_i^* = (E - c_j)_+ + \frac{1}{2}(E - (E - c_i)_+ - (E - c_j)_+).$$

Podział ten możemy zilustrować w następujący sposób:



Rozwiązanie zadania M 1689.

Na początku zauważmy, że opisana w zadaniu konfiguracja jest analogonem stereometrycznym następującego dobrze znanego lematu, który często nazywany jest *lematem o czwórliściu*:

W trójkącie ABC punkty I i J są środkami okręgów: wpisanego i dopisanego (stycznego do boku BC). Niech prosta IJ przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $K \neq A$. Wówczas $IK = KJ$.

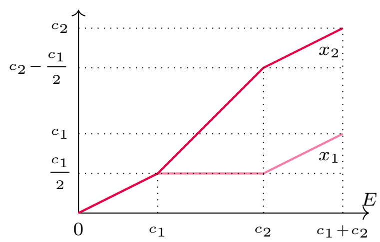
Rozważmy teraz płaszczyznę przechodzącą przez prostą AIJ i prostopadłą do płaszczyzny BCD. Przecina ona obie sfery wzdłuż ich okręgów wielkich. Niech styczne poprowadzone z punktu A do tych okręgów przecinają płaszczyznę BCD w punktach X i Y. Wtedy I i J są środkami okręgów: wpisanego i dopisanego trójkąta AXY (korzystamy tu z tego, że punkty styczności sfer wpisanej i dopisanej do BCD należą również do badanej płaszczyzny, co nietrudno uzasadnić). Zatem na podstawie powyższego lematu środek odcinka IJ leży na łuku XY okręgu opisanego na tym trójkącie. Jednakże zarówno X, jak i Y leżą wewnątrz sfery opisanej czworościanu $ABCD$, dlatego też łuk XY leży również wewnątrz tej sfery, a zatem

$$IK > \frac{IJ}{2} > JK.$$

Tabelka przedstawiająca podział $\varphi^*(E; c_1, c_2)$ w zależności od E:

	x_1	x_2
$E < c_1$	$E/2$	$E/2$
$c_1 \leqslant E \leqslant c_2$	$c_1/2$	$E - c_1/2$
$c_2 < E$	$\dfrac{c_1 - c_2 + E}{2}$	$\dfrac{c_2 - c_1 + E}{2}$

Na wykresie wygląda to tak:



Analizując, jak wygląda podział dla różnych wartości E (pomocna jest w tym tabelka i wykres na marginesie), możemy zinterpretować metodę φ^* jako proces dzielenia wartości E moneta po monecie. Dopóki E jest mniejsze niż c_1, każdą monetę dzielimy po równo między obie osoby (do tej monety obie osoby wnoszą roszczenia). Kiedy E przekroczy c_1, to każda kolejna moneta idzie do drugiej osoby (do tej monety pierwsza osoba nie wnosi roszczeń). Kiedy E przekroczy c_2, to znowu każdą monetę dzielimy po równo (obie połowy tej monety możemy zinterpretować jako części, do których tylko jedna z osób wnosi roszczenie). Widzimy zatem, że nasza metoda jest monotoniczna – dla ustalonych roszczeń większa wartość E przekłada się na większą wypłatę dla obu osób.

Problem bankructwa to uogólnienie sporu o ubiór na więcej niż dwie osoby. Oznaczmy przez $(E; c_1, \ldots, c_n)$ sytuację, w której majątek to E, a roszczenia żon to $c_1, \ldots, c_n$. Ponownie założymy, że $0 \leqslant c_1 \leqslant \cdots \leqslant c_n$ oraz że suma roszczeń jest większa lub równa majątkowi: $E \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$. Metoda podziału dla danego $(E; c_1, \ldots, c_n)$ zwraca n liczb $(x_1, \ldots, x_n)$, które sumują się do E.

W jaki sposób możemy uogólnić rozwiązanie dla sporu o ubiór na dowolną liczbę osób? Aumann i Maschler zaproponowali następującą metodę: powiemy, że rozwiązanie jest *spójne* z rozwiązaniem sporu o ubiór, jeżeli dowolne dwie żony podzieliłyby się swoją wspólną wypłatą w sporze o ubiór w ten sam sposób, jak podzielono majątek teraz. Formalnie, podział $(x_1, \ldots, x_n)$ jest spójny z metodą φ^*, jeżeli dla każdej pary i, j mamy:

$$\varphi^*(x_i + x_j; c_i, c_j) = (x_i, x_j).$$

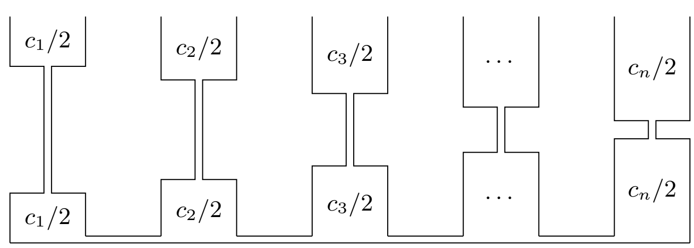
Czy tak da się zrobić? I jeżeli tak, to czy na jeden sposób? Do tych pytań zaraz wrócimy, ale sprawdźmy najpierw, czy spójność jest spójna z oryginalnymi rozwiązaniami opisanymi w Talmudzie. Weźmy np. sytuację, w której majątek denata wynosi 200 monet. Dostajemy wówczas następujące sformułowanie problemu $(200; 100, 200, 300)$, dla którego rozwiązaniem jest $(50, 75, 75)$. Sprawdźmy zatem dowolną parę żon:

$$\varphi^*(125; 100, 200) = (50, 75) = \varphi^*(125; 100, 300), \quad \varphi^*(150; 200, 300) = (75, 75).$$

Rzeczywiście, zgadza się! Dla pozostałych wariantów, 100 i 300 monet, rozwiązania z Talmudu też są spójne, co pozostawiamy do sprawdzenia Czytelnikowi.

Skupmy się teraz na pytaniu, czy może być więcej niż jedno spójne rozwiązanie problemu bankructwa? Okazuje się, że nie. Załóżmy, że mamy dwa spójne rozwiązania, $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_n)$. Skoro się różnią, to musi istnieć żona i, która w pierwszym podziale ma większą wypłatę niż w drugim: $x_i > y_i$. Wynika z tego, że musi także istnieć żona j, która w pierwszym podziale ma mniejszą wypłatę niż w drugim: $x_j < y_j$. Bez straty ogólności możemy założyć, że w pierwszym podziale obie żony dostają razem nie mniej niż w drugim: $x_i + x_j \geqslant y_i + y_j$. Czy jest teraz możliwe, że oba podziały, (x_i, x_j) oraz (y_i, y_j), pochodzą z metody φ^*? Czyli czy może być tak, że $\varphi^*(x_i + x_j, c_i, c_j) = (x_i, x_j)$ oraz $\varphi^*(y_i + y_j, c_i, c_j) = (y_i, y_j)$? Gdyby tak było, to żona j dostałaby mniejszą wypłatę $(x_j < y_j)$ przy podziale większej (lub równej) wartości $(x_i + x_j \geqslant y_i + y_j)$. A tak być nie może, bo przeczy to monotoniczności metody φ^* – dostaliśmy sprzeczność.

Udowodniliśmy więc, że jest najwyżej jedno rozwiązanie problemu bankructwa spójne z rozwiązaniem sporu o ubiór. Jak ono wygląda? O tak:



Obrazek powyżej przedstawia hipotetyczny system naczyń połączonych, który definiuje metodę podziału. Mamy n naczyń o pojemności $c_1, \ldots, c_n$, każde złożone

Rozwiązanie zadania M 1688.
Dla nieparzystych n.

Najpierw pokażemy, że dla nieparzystych n jest to możliwe. Powiedzmy, że *blok* to taki zestaw kolejnych punktów tego samego koloru, że punkty znajdujące się bezpośrednio po jego lewej i prawej stronie mają przeciwny kolor.

Łatwo zauważyć, że blok o nieparzystej liczbie punktów można przemalować na przeciwny kolor. Jeżeli blok ma 1 punkt, to oczywiste. Załóżmy zatem, że blok ma co najmniej 3 czerwone punkty, i rozważmy jego trzy ostatnie punkty oraz pierwszy sąsiedni punkt, tzn. sekwencję postaci $(\ldots)$CCCN. Wówczas na mocy warunków zadania możemy go przemalować w następujący sposób:

$(\ldots)$CCCN $\to$ $(\ldots)$CNCN $\to$ $(\ldots)$CNNN.

Wobec tego możemy zmienić kolor dwóch ostatnich punktów w bloku. Ponieważ rozważany blok ma nieparzystą liczbę punktów, postępując analogicznie, doprowadzimy do sytuacji, w której pierwszy punkt bloku będzie czerwony, a jego sąsiedzi niebiescy (NCN), co łatwo przemalujemy na NNN.

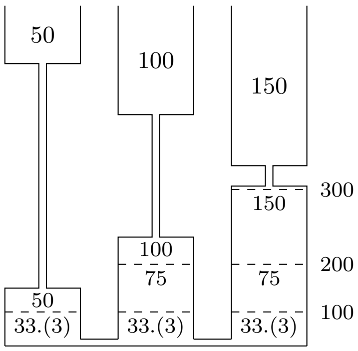
Jeśli po przemalowaniu bloku nadal istnieją punkty różnych kolorów, to ze względu na to, że n jest liczbą nieparzystą, istnieje nadal blok nieparzystej długości. Jest więc jasne, że kontynuując ten proces, otrzymamy n punktów jednokolorowych.

Jeśli $4 \mid n$, to dzielimy zbiór wszystkich punktów na sekwencje czterech kolejnych punktów i każdą z nich malujemy w następujący sposób: NNCC. Wtedy nie możemy przemalować żadnego z punktów.

Jeśli zaś $n \equiv 2 \pmod 4$, to wyróżniamy dwa sąsiednie punkty i malujemy je w sposób NN, pozostałe punkty dzielimy na czwórki i kolorujemy je tak jak poprzednio: NNCC. Łatwo zauważyć, że w dwóch ruchach można jedynie albo wrócić do początkowej konfiguracji, albo przejść do analogicznej.

z dwóch zbiorników połączonych bardzo cienką rurką o pomijalnej objętości. U podstawy wszystkie naczynia łączy równie cienka rurka. Metoda podziału określona jest teraz tak: do tak określonego systemu wlewamy E wody i każdej żonie przyznajemy tyle majątku, ile wody znajdzie się w jej naczyniu.

System naczyń połączonych dla sytuacji opisanych w Talmudzie



Łatwo teraz sprawdzić, że dla dwóch żon opisana metoda odpowiada metodzie φ^*. Dobrze widać to z opisu sekwencyjnego: dopóki E jest mniejsze niż c_1, woda po równo wypełnia naczynia pierwszej i drugiej żony. Kiedy E przekroczy c_1, to wody przybywać będzie tylko w drugim naczyniu. W końcu kiedy E przekroczy c_2 (czyli zostanie mniej niż $(c_1 + c_2) - c_2 = c_1$ powietrza w obu naczyniach), woda znowu zacznie równomiernie wypełniać oba naczynia.

Popatrzmy teraz na dowolny podział majątku wynikający z naszego systemu naczyń połączonych: $(x_1, \ldots, x_n)$. Weźmy dowolne dwie żony i, j. Kiedy skupimy się na ich naczyniach, łatwo zauważymy, że $\varphi^*(x_i + x_j; c_i, c_j) = (x_i, x_j)$, tzn. podział (x_i, x_j) sumy ich wypłat $x_i + x_j$ przy roszczeniach c_i, c_j odpowiada podziałowi uzyskiwanemu metodą φ^*. Jest tak, ponieważ ilość wody w naczyniach obu żon jest taka sama, jak gdyby z systemu usunąć wszystkie pozostałe naczynia i wlać $x_i + x_j$ wody. A skoro wcześniej stwierdziliśmy, że więcej niż jedno spójne rozwiązanie nie może istnieć, wiemy teraz, że jest to jedyne spójne rozwiązanie problemu bankructwa.

Nasz dotychczasowy opis podziału nie był zbytnio ścisły, a niektórzy mogliby wręcz uznać go za „lanie wody”. Aby podać formalny wzór, zacznijmy od zauważenia, że opisana metoda jest *autodualna*, czyli zyski dzieli w ten sam sposób, co straty. Jeżeli wypłatę żony i oznaczymy przez φ_i, a sumę roszczeń przez C, to mamy:

$$\varphi_i(E; c_1, \ldots, c_n) = c_i - \varphi_i(C - E; c_1, \ldots, c_n).$$

Wartość $C - E$ to po prostu to, ile majątku brakuje, aby spełnić wszystkie roszczenia. Wzór ten oznacza zatem, że każda żona otrzymuje całe swoje roszczenie pomniejszone o sprawiedliwą część kwoty, której brakuje.

Wnikliwy Czytelnik może zastanowić się, jaki system naczyń połączonych będzie odpowiadał podziałowi proporcjonalnemu: $\varphi_i(E; c_1, \ldots, c_n) = E \cdot c_i / C$? A jaki podziałowi „po równo, ale nie więcej niż roszczenie żony”, czyli $\varphi_i(E; c_1, \ldots, c_n) = \min\{c_i, a\}$ dla pewnego (jednoznacznie wyznaczonego) a?

Aby zobaczyć, że własność ta jest spełniona, wystarczy popatrzeć znowu na nasz system naczyń połączonych. To, ile wody znajdzie się w naczyniu, jest równe pojemności tego naczynia minus ilość powietrza, jakie w tym naczyniu zostanie. Powietrze wypełnia jednak naczynia od góry dokładnie w ten sam sposób, jak woda wypełnia je od dołu, a we wszystkich naczyniach jest dokładnie $C - E$ powietrza.

Policzmy teraz, ile majątku potrzebujemy, aby k pierwszych osób dostało połowę swojego roszczenia. Oznaczymy tę wartość przez $f(k)$. Mamy:

$$f(k) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{c_i}{2} + \frac{c_k}{2} \cdot (n - k).$$

W szczególności $f(1) = n \cdot c_1/2$ oraz $f(n) = C/2$. Z autodualności wiemy także, że jeżeli majątek pokrywa połowę wszystkich roszczeń, to możemy odwrócić sytuację i skupić się na podziale brakującej części majątku. Naszą metodę opisuje zatem następujący wzór:

$$\varphi(E; c_1, \ldots, c_n) = \begin{cases} \left(\frac{E}{n}, \ldots, \frac{E}{n}\right) & \text{jeżeli } E \leqslant f(1), \\ \left(\frac{c_1}{2}, \ldots, \frac{c_k}{2}, \frac{c_k}{2} + \frac{E - f(k)}{n-k}, \ldots\right) & \text{jeżeli } f(k) < E \leqslant f(k+1), \\ (c_1, \ldots, c_n) - \varphi(C - E; c_1, \ldots, c_n) & \text{jeżeli } E > C/2. \end{cases}$$

Dla sytuacji opisanej w Talmudzie mamy: $f(1) = 150$, $f(2) = 250$ i $f(3) = 300$. Podane scenariusze przedstawiają zatem po jednym przykładzie na każdy z trzech przedziałów: $100 \in [0, 150)$, $200 \in (150, 250]$ i $300 \in (250, 300]$. Sprytnie pomyślane!

W naszym artykule pominęliśmy jeden istotny szczegół: Aumann i Maschler napisali, że nie znaleźliby omawianej metody, gdyby nie… gry koalicyjne (o grach koalicyjnych wspominaliśmy już w Δ^{11}_{16} oraz Δ^{11}_{20}). Okazuje się bowiem, że opisana metoda podziału to tak zwane *jąderko* (*nucleolus*) pewnej gry koalicyjnej. O tym jakże ciekawym wyniku opowiemy już jednak kolejnym razem.

Rozwiązanie zadania M 1687.
Wystarczy wziąć liczby całkowite

$$x = \frac{b+1}{a}, \quad y = \frac{b(b+1)}{a}, \quad z = \frac{(b+1)^2}{a^2}.$$