

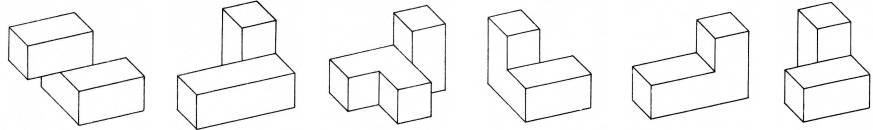
Kostka

Jarosław GÓRNICKI*

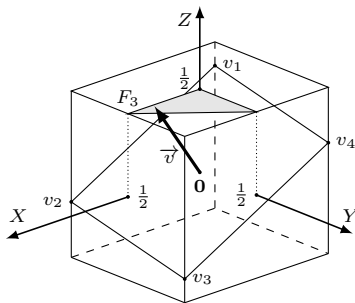
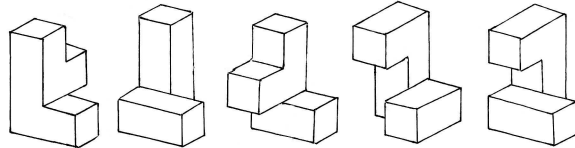
* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Uzależnieni od *cubitis magikia* z przyjemnością przeczytają tekst Michała Szurka, *Opowieści matematyczne* (WSiP, Warszawa 1987), str. 106–119.

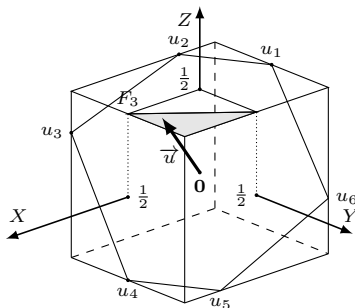
W pudełku znalazłem kostkę Rubika – szaleństwo lat osiemdziesiątych XX wieku („Poradnik dla cierpiących na *Cubitis magikia*”, Andrzej Pilitowski, Tomasz Weppo, Δ_{82}^2). Wróciły wspomnienia, takie jak łamigłówka Jana Mikusińskiego: z sześciu klocków przedstawionych poniżej ułożyć sześcian 3×3 .



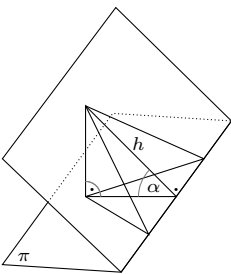
Jeszcze trudniejsze jest ułożenie sześcianu 3×3 z pięciu klocków pokazanych poniżej. Chcesz mieć taką zabawkę... zrób to sam!



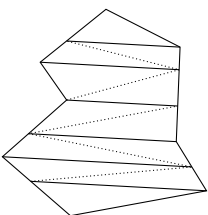
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Po ćwiczeniach dla ciała czas na ćwiczenie umysłu. Odpowiemy na kilka pytań dotyczących kostki jednostkowej

$$I^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2, 3\}$$

zanurzonej w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^3 .

Pytanie 1. Jaka jest maksymalna długość odcinka zawartego w kostce I^3 ?

Jest to proste pytanie, na rozgrzewkę. Przekątna kostki ma długość $\sqrt{3}$. Udowodnimy, że „dłużej się nie da”. Istotnie, jeśli (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3) są dwoma punktami kostki jednostkowej, to odległość między nimi wynosi

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

a to z kolei jest nie większe od $\sqrt{3}$, gdyż $|x_i - y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq 1$, dla $i = 1, 2, 3$. Analogicznie, wielka przekątna w wielowymiarowej kostce I^n ma długość \sqrt{n} . Średnica kostki jednostkowej rośnie nieograniczenie wraz z jej wymiarem!

Pytanie 2. Jakie jest maksymalne pole przekroju kostki I^3 ?

Zacznijmy od płaszczyzn zawierających środek 0 kostki I^3 . Położenie płaszczyzny określa wektor do niej prostopadły, zaczepiony w punkcie 0 .

Ze względu na symetrię rozważymy jedynie wektory o końcach na górnej ścianie $F_3 = \{(x_1, x_2, \frac{1}{2}) : |x_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, przy czym ograniczymy się do ćwiartki, na której $0 \leq x_1, x_2 \leq \frac{1}{2}$. Tu zaś mamy dwa przypadki:

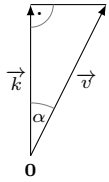
- (1) gdy końcem wektora \vec{v} jest punkt ze zbioru $V = \{(x_1, x_2, \frac{1}{2}) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}\}$, przekrój jest równoległobokiem (rys. 1),
- (2) gdy końcem wektora \vec{u} jest punkt ze zbioru $U = \{(x_1, x_2, \frac{1}{2}) : x_1 \leq \frac{1}{2}, x_2 \leq \frac{1}{2}, x_1 + x_2 > \frac{1}{2}\}$, przekrój jest sześciokątem (rys. 2).

W dalszym rozumowaniu przyda się następująca

Dygresja. Jeżeli $m_2(W)$ jest polem wielokąta W , to pole jego rzutu prostopadłego na płaszczyznę π jest równe $m_2(W) \cdot \cos \alpha$, przy czym α jest miarą kąta między płaszczyzną π a płaszczyzną wielokąta.

To oczywiście dla trójkąta, którego bok leży na przecięciu płaszczyzny π z płaszczyzną trójkąta. Rzut prostopadły nie zmienia długości tego boku, a długość rzutu wysokości trójkąta opuszczonej na ten bok jest równa $h \cdot \cos \alpha$ (rys. 3). Dowolny wielokąt dzielimy prostymi równoległymi do linii przecięcia płaszczyzn, przechodzącymi przez wierzchołki wielokąta (rys. 4). Powstałe trapezy dzielimy dowolną przekątną. Otrzymaliśmy skończoną liczbę trójkątów o podstawach równoległych do linii przecięcia płaszczyzn. Po zastosowaniu wcześniejszej obserwacji do każdego z tych trójkątów i zsumowaniu pól dostaniemy dowód dygresji.

W przypadku (1) płaszczyzna równoległoboku $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$ tworzy z płaszczyzną $x_3 = \frac{1}{2}$ kąt α , taki jak wektor $\vec{v} = [x_1, x_2, \frac{1}{2}]$ z osią \mathbf{OZ} o wektorze kierunkowym $\vec{k} = [0, 0, \frac{1}{2}]$ (rys. 5). Zatem



Rys. 5

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{k}|}{|\vec{v}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + x_1^2 + x_2^2}},$$

a ponieważ górna ściana F_3 jest rzutem prostokątnym równoległoboku $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$, więc

$$m_2(F_3) = m_2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4) \cdot \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + x_1^2 + x_2^2}} \cdot m_2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4).$$

Stąd

$$m_2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4) = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + x_1^2 + x_2^2}}{\frac{1}{2}} \cdot m_2(F_3) = 2\sqrt{\frac{1}{4} + x_1^2 + x_2^2}$$

dla $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$ i $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$. Z ostatnich nierówności wynika, że $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4} - 2x_1x_2 \leq \frac{1}{4}$, więc

$$1 \leq m_2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4) \leq \sqrt{2},$$

gdzie dolne ograniczenie jest osiągnięte dla $\vec{v} = [0, 0, \frac{1}{2}]$, a górne ograniczenie jest osiągnięte dla $\vec{v} = [\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]$ lub $\vec{v} = [0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

W przypadku (2) łatwo obliczyć, że $\mathbf{u}_1 = (\frac{2x_2-1}{4x_1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ oraz $\mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{2x_1-1}{4x_2}, \frac{1}{2})$. Rzut prostokątny sześciokąta $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{u}_4\mathbf{u}_5\mathbf{u}_6$ na ścianę F_3 nie wypełni jej – rzuty odcinków $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$ oraz $\mathbf{u}_4\mathbf{u}_5$ „odcinają” dwa trójkąty o łącznej powierzchni $(\frac{1}{2} + \frac{2x_2-1}{4x_1})(\frac{1}{2} + \frac{2x_1-1}{4x_2})$. Zatem

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2x_2-1}{4x_1}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{2x_1-1}{4x_2}\right) = m_2(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{u}_4\mathbf{u}_5\mathbf{u}_6) \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + x_1^2 + x_2^2}},$$

skąd

$$m_2(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{u}_4\mathbf{u}_5\mathbf{u}_6) = \sqrt{1 + (2x_1)^2 + (2x_2)^2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2x_2-1}{4x_1}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{2x_1-1}{4x_2}\right)\right]$$

dla $x_1 \leq \frac{1}{2}$ i $x_2 \leq \frac{1}{2}$ i $x_1 + x_2 > \frac{1}{2}$. Standardowa analiza funkcji dwu zmiennych we wskazanym obszarze zapewnia, że

$$\sqrt{\frac{3}{2}} < m_2(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{u}_4\mathbf{u}_5\mathbf{u}_6) < \sqrt{2}.$$

Zatem pole przekroju Q kostki I^3 , który zawiera punkt $\mathbf{0}$, spełnia nierówność

$$1 \leq m_2(Q) \leq \sqrt{2}.$$

Pozostają do rozważenia przekroje, które nie przechodzą przez $\mathbf{0}$. Do tego przydatna będzie kolejna

Dygresja. Dla niepustych, wypukłych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, liczb $t \in \mathbb{R}$ określamy *działania Minkowskiego*:

$$A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}, \quad t \cdot A = \{ta : a \in A\}$$

(na elementy a, b możemy patrzeć jak na wektory $\vec{\mathbf{0}}a, \vec{\mathbf{0}}b$). *Nierówność Brunna–Minkowskiego* (1887) zapewnia, że

$$\left[m_n\left(\frac{1}{2}(A+B)\right)\right]^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2}\left([m_n(A)]^{\frac{1}{n}} + [m_n(B)]^{\frac{1}{n}}\right),$$

przy czym m_n oznacza n -wymiarową miarę (m_1 to długość, m_2 to pole, m_3 objętość).

Niech S będzie dowolnym przekrojem kostki I^3 , a S' przekrojem symetrycznym względem punktu $\mathbf{0}$ (płaszczyzny przekrojów S i S' są równoległe i ich pola są równe).

Wtedy $\mathbf{0} \in \frac{1}{2}(S + S') \subset I^3$, bo kostka I^3 jest zbiorem wypukłym. Z równoległości S oraz S' wnioskujemy, że $\frac{1}{2}(S + S')$ jest zawarte w płaszczyźnie równoległej do



Rozwiązanie zadania F 1034.

Przyjmujemy, że nad powierzchnią próbki znajduje się gaz doskonały o liczbie cząsteczek w jednostce objętości równej n . W jednostce czasu Δt do elementu S pola powierzchni próbki dociera ΔN cząsteczek gazu. Gdyby wszystkie cząsteczki gazu poruszały się z tą samą prędkością \vec{v} , to mielibyśmy $\Delta N(\vec{v}) = n|\vec{v}|\cos(\Theta)S\Delta t$, przy czym Θ oznacza kąt, jaki \vec{v} tworzy z prostą prostopadłą do powierzchni. Cząsteczki gazu poruszają się z prędkościami podlegającymi rozkładowi Maxwella (postać rozkładu nie będzie nam tu potrzebna). Aby otrzymać odpowiedź, musimy $|\vec{v}|\cos(\Theta)$ wysumować po wszystkich prędkościach, dla których kąt Θ odpowiada zbliżaniu się cząsteczki do próbki – otrzymamy wyrażenie postaci:

$$\Delta N = \alpha v_{sr} n \Delta t,$$

gdzie α wynika z postaci rozkładu Maxwella, a v_{sr} jest pierwiastkiem ze średniego kwadratu prędkości; w temperaturze T dla cząsteczki o masie m mamy $mv_{sr}^2 = 3kT$, przy czym k oznacza stałą Boltzmann. Równanie stanu gazu doskonałego dla N cząsteczek wypełniających objętość V , $pV = NkT$, prowadzi do zależności:

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Ostatecznie:

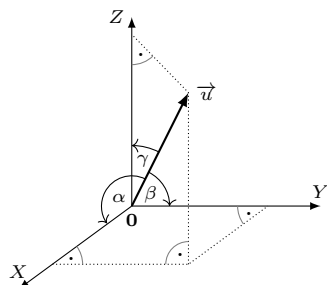
$$\Delta N = \alpha p \Delta t S \sqrt{\frac{3}{mkT}} = p \Delta t S / \sqrt{2\pi mkT}.$$

Ostatnia równość wynika z podstawienia „dokładnej” wartości $\alpha = 1/\sqrt{6\pi}$. Dla badających właściwości powierzchni otrzymany wynik jest bardzo ważny – oznacza, że zmniejszenie ciśnienia zwiększa czas na wykonanie pomiarów, nim powierzchnia pokryje się cząsteczkami gazu powyżej dopuszczalnej wartości $\Delta N/S$.

płaszczyzny przekroju S , i z nierówności Brunna–Minkowskiego dostajemy

$$\sqrt{m_2(S)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{m_2(S)} + \sqrt{m_2(S')} \right) \leq \sqrt{m_2 \left(\frac{1}{2}(S + S') \right)}.$$

Co ciekawe, w ogólności miara m_{n-1} maksymalnego przecięcia kostki jednostkowej I^n hiperpłaszczyzną $(n-1)$ -wymiarową jest równa $\sqrt{2}$ (K. Ball, *Cube slicing in \mathbb{R}^n* , Proceedings of the American Mathematical Society (1986), 465–473). Nie wiemy jednak, jakie jest maksymalne pole przekroju (płaszczyzną) kostki jednostkowej I^5, I^7, I^9, I^{11} .



Rys. 6

Wobec tego

$$m_2(S) \leq m_2 \left(\frac{1}{2}(S + S') \right) \leq \sqrt{2}.$$

Przekrój kostki I^3 płaszczyzną zawierającą antypodyczne krawędzie ma największe pole równe $\sqrt{2}$.

Pytanie 3. Jakie jest maksymalne pole rzutu prostopadłego kostki I^3 ?

Oznaczmy przez P płaszczyznę w przestrzeni \mathbb{R}^3 , która przechodzi przez punkt $\mathbf{0}$ i jest prostopadła do wektora jednostkowego $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$. Jeśli wektor \vec{u} tworzy z osiami $\mathbf{OX}, \mathbf{OY}, \mathbf{OZ}$ kąty α, β, γ , odpowiednio (rys. 6), to długości rzutów wektora \vec{u} na osie $\mathbf{OX}, \mathbf{OY}, \mathbf{OZ}$ są równe: $|u_1| = |\cos \alpha|, |u_2| = |\cos \beta|, |u_3| = |\cos \gamma|$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa:

$$1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Ponieważ rzut prostopadły kostki I^3 na płaszczyznę P jest zawsze rzutem prostopadłym co najwyżej trzech ścian F_i, F_j, F_k o wspólnym wierzchołku, więc

$$\begin{aligned} m_2(\text{Proj}_P(I^3)) &= m_2(F_i) \cdot \cos \alpha + m_2(F_j) \cdot \cos \beta + m_2(F_k) \cdot \cos \gamma = \\ &= \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma, \end{aligned}$$

gdzie $\text{Proj}_P(F)$ jest rzutem figury F na płaszczyznę P .

Dygresja. Dla liczb nieujemnych a_1, a_2, \dots, a_n ,

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n).$$

Korzystając z nierówności $2a_i a_j \leq a_i^2 + a_j^2$, mamy zatem

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2),$$

skąd

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2},$$

i równość ma miejsce, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Korzystając z powyższej dygresji, mamy więc oszacowanie

$$m_2(\text{Proj}_P(I^3)) \leq |\cos \alpha| + |\cos \beta| + |\cos \gamma| \leq \sqrt{3},$$

i ograniczenie górne jest osiągnięte, gdy wektor \vec{u} leży na prostej łączącej środek kostki I^3 z jej wierzchołkiem. Wtedy rzut prostopadły kostki I^3 na płaszczyznę P jest sześciokątem o polu $\sqrt{3}$ (rys. 6).

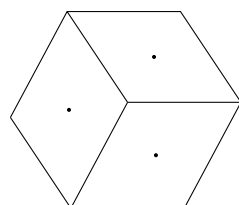
Pytanie 4. Jaka jest najmniejsza liczba czworościanów wypełniających kostkę I^3 ?

Gdy zbudujemy czworościan z przekątnych wszystkich ścian bocznych kostki I^3 (rys. 7), $T_1 = BC'A'D$, to pozostałe czworościany, $T_2 = ABDA'$, $T_3 = BCDC'$, $T_4 = C'D'A'D$, $T_5 = A'B'C'B$, wypełnią kostkę I^3 . Czy wystarczą cztery czworościany? Odpowiedź brzmi – nie!

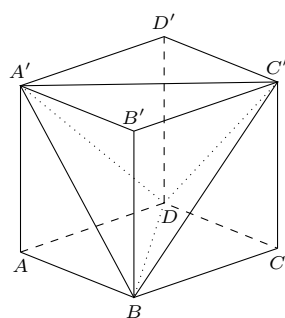
Ściany czworościanu są trójkątami. Powierzchnia boczna kostki I^3 to sześć kwadratów, więc minimalna liczba trójkątów, które ją tworzą, to 12. Skoro co najwyżej trzy ściany boczne czworościanu mogą współtworzyć powierzchnię boczną kostki I^3 , to liczba czworościanów wypełniających powierzchnię boczną kostki I^3 jest $\geq \frac{12}{3} = 4$. Jednak 4 czworościany zapełniające powierzchnię boczną kostki I^3 nie wypełnią całej kostki, gdyż mają objętość nie większą niż $4 \cdot \frac{1}{3!} = \frac{2}{3} < 1$. Zatem *najmniejsza liczba czworościanów wypełniających kostkę I^3 to pięć* (P. S. Mara, 1976).

Zadanie. Wykazać, że czworościan foremny o boku długości $\sqrt{2}$ ma największą objętość wśród wszystkich czworościanów wpisanych w kostkę jednostkową I^3 .

Dla jednostkowych kostek n -wymiarowych I^n , nawet w niskich wymiarach, wiele pytań jest bez odpowiedzi (C. Zong, *What is known about unit cubes*, Bull. Amer. Math. Soc. (NS) 42(2005), 181-211). Zabawa klockami może być poważną matematyką!



Rys. 7



Rys. 8