Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2021

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 817 ($WT = 2{,}06$) i 818 ($WT = 2{,}23$) z numeru 3/2021

Paweł Burdzy	Warszawa	45,41
Jakub Węgrecki	Kraków	45,17
Michał Adamaszek	Kopenhaga	44,74
Mikołaj Pater	Opole	42,27
Piotr Kumor	Olsztyn	38,33
Łukasz Merta	Kraków	34,61
Witold Bednarek	Łódź	34,60
Błażej Żmija	Kraków	33,78
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74

Wreszcie – po blisko roku czekania – nowe nazwiska w matematycznym Klubie 44 – i to od razu dwa: panowie Paweł Burdzy i Jakub Węgrecki. Witamy! Dla kontrastu, pan Michał Adamaszek mija metę już szósty raz!

Zadania z matematyki nr 827, 828

Redaguje Marcin E. KUCZMA

827. Niech T_m oznacza liczbę naturalną, której zapis dziesiętny składa się z m trójek (np. $T_4 = 3333$). Wyjaśnić, czy istnieją takie liczby naturalne m, n, że suma cyfr liczby nT_m jest mniejsza niż $3m$.

828. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor cx_i \rfloor \geqslant (c-1)\sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i \rfloor + \left\lfloor \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rfloor .$$
Zadanie 828 zaproponował pan Mikołaj Pater z Opola jako uogólnienie znanej nierówności $\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor \geqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor$.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2021

Przypominamy treść zadań:

823. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z, spełniające układ równań
$$\frac{\sin x}{2} = \frac{\sin y}{3} = \frac{\sin z}{4} = -\sin(x+y+z).$$

824. Niech $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych ($p_1 = 2$). Dla $n \geqslant 1$ niech q_n oznacza liczbę wyrazów tego ciągu, które są mniejsze od n (w zwykle używanej notacji: $q_n = \pi(n-1)$), i niech $a_n = n + p_n$, $b_n = n + q_n$. Udowodnić, że każda liczba całkowita dodatnia jest wyrazem dokładnie jednego z ciągów (a_n), (b_n).

823. Oznaczmy $x + y + z = s$. Gdy podany układ równań jest spełniony, każde z wyrażeń $X = \sin x + 2\sin s$, $Y = \sin y + 3\sin s$, $Z = \sin z + 4\sin s$ ma wartość 0. Zatem
$$\begin{aligned} 0 = X + Y - Z &= (\sin x + \sin y) + (\sin s - \sin z) = \\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\sin\frac{s-z}{2}\cos\frac{s+z}{2} = \qquad \begin{bmatrix} s-z= \\ =x+y \end{bmatrix} \\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot 2\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{y+z}{2}. \end{aligned}$$
Stąd alternatywa: liczba $x + y$ jest parzystą wielokrotnością π lub jedna z liczb $x + z$, $y + z$ jest nieparzystą wielokrotnością π. Wówczas, odpowiednio, $\sin s$ równa się $\sin z$ lub $-\sin y$ lub $-\sin x$. W każdym przypadku układ równań $X = Y = Z = 0$ wymusza równość $\sin s = \sin z = \sin y = \sin x = 0$. To znaczy, że każda z liczb x, y, z jest wielokrotnością liczby π. Na odwrót, gdy tak jest, zadany układ równań jest spełniony.

824. Dla kilku najmniejszych liczb naturalnych zgadza się: $1 = b_1$, $2 = b_2$, $3 = a_1$, $4 = b_3$. Weźmy teraz liczbę naturalną $m > 3$ i przypuśćmy, że nie jest ona wyrazem ciągu (a_n). Istnieje więc numer $k \geqslant 1$, dla którego $a_k < m < a_{k+1}$. Pokażemy, że

(∗) jeśli $a_k < m < a_{k+1}$, to $b_{m-k} = m$.

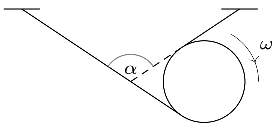
Zgodnie z określeniem ciągu (a_n) mamy $k + p_k < m < (k+1) + p_{k+1}$, czyli $p_k < m - k \leqslant p_{k+1}$. Jest więc k liczb pierwszych, mniejszych od $m - k$, co oznacza, że $q_{m-k} = k$. Stąd $b_{m-k} = (m-k) + q_{m-k} = m$; implikacja (∗) została wykazana. Dowodzi ona, że każda liczba naturalna, nieobecna w ciągu (a_n), znajduje się w ciągu (b_n).

Pozostaje wykazać, że żaden wyraz ciągu (a_n) nie występuje w ciągu (b_n). Dla $a_1 = 3$ tak jest. Ustalmy $r \geqslant 2$ i weźmy pod uwagę liczbę a_r. Ciąg (p_n) jest ściśle rosnący, zatem ciąg (a_n) nie zawiera pary kolejnych liczb; stąd $a_{r-1} < a_r - 1$ oraz $a_r + 1 < a_{r+1}$. Implikacja (∗), zastosowana najpierw dla wartości $k = r - 1$, $m = a_r - 1$, a następnie dla $k = r$, $m = a_r + 1$, daje równości:
$$b_{a_r - r} = a_r - 1 \quad \text{oraz} \quad b_{a_r + 1 - r} = a_r + 1.$$
Tak więc liczby $a_r - 1$ oraz $a_r + 1$ są wyrazami ciągu (b_n) o dwóch kolejnych numerach $n = a_r - r$, $n = a_r + 1 - r$; wartość a_r zostaje przez ciąg (b_n) przeskoczona.

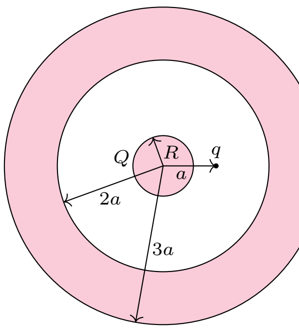
Konkluzje obu powyższych akapitów składają się na dowodzoną tezę: ciągi (a_n), (b_n) są wzajemnie komplementarne.

Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2021



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 724, 725

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

724. Ciężka tarcza o promieniu R stacza się na dwóch nierozciągliwych niciach. Nici są nawinięte na tarczę, a ich wolne końce są zamocowane (rys. 1). Podczas ruchu tarczy nici są cały czas napięte. W pewnej chwili prędkość kątowa tarczy wynosi ω, kąt pomiędzy nićmi jest wtedy równy α. Jaką prędkość ma w tym momencie środek tarczy?

725. Przyjmijmy, że Ziemia obiega Słońce po orbicie kołowej o promieniu $R = 1$ j.a. Po jakim czasie spadłaby na Słońce, gdyby nagle została zatrzymana? Ziemię i Słońce potraktujmy jako punkty materialne.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2021

Przypominamy treść zadań:

720. Satelita Ziemi o masie $m = 10$ kg porusza się po orbicie kołowej w wysokich warstwach atmosfery i działa na niego siła oporu $F = 5 \cdot 10^{-4}$ N ze strony rozrzedzonego powietrza. O ile zmieni się prędkość satelity po wykonaniu jednego obrotu wokół Ziemi? Odległość satelity od Ziemi jest mała w porównaniu z promieniem Ziemi. Przyjmij, że promień Ziemi $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, przyspieszenie na powierzchni Ziemi $g = 9{,}8$ m/s^2.

721. Metalowa kula o promieniu R, naładowana ładunkiem Q oraz ładunek punktowy q umieszczony w odległości a od środka kuli otoczone są współśrodkową z kulą metalową warstwą sferyczną o promieniach wewnętrznym $2a$ i zewnętrznym $3a$ (rys. 2), naładowaną ładunkiem $2Q$. Znaleźć potencjały kuli oraz otaczającej ją metalowej powłoki.

720. Energia całkowita satelity na orbicie o promieniu r, poruszającego się z prędkością v, wynosi $E = mv^2/2 - GMm/r$. Siła dośrodkowa jest siłą grawitacji $mv^2/r = GMm/r^2$, stąd $E = -mv^2/2 = -GMm/2r$. Praca siły oporu powoduje zmniejszenie energii satelity, przy czym rośnie jego prędkość, a promień orbity maleje. Promień orbity okołoziemskiej równy jest w przybliżeniu promieniowi Ziemi R, a prędkość satelity równa jest w przybliżeniu pierwszej prędkości kosmicznej $v \approx \sqrt{gR} = 8 \cdot 10^3$ m/s. Spodziewamy się, że zmiany promienia orbity oraz prędkości podczas jednego obrotu są bardzo małe. Zmiana energii satelity podczas jednego obrotu wyraża się wzorem

$$\Delta E = -GMm/2\,(R + \Delta R) + GMm/2R = GMm\Delta R/2\,(R + \Delta R)\,R.$$

Zakładając, że $\Delta R \ll R$, możemy napisać $-2\pi RF = GMm\Delta R/2R^2 = mg\Delta R/2$, stąd $\Delta R = -4\pi RF/mg \approx -\,4 \cdot 10^2$m, co potwierdza, że nasze założenie jest słuszne. Wyrażając zmianę energii satelity przez jego zmianę prędkości, dostajemy

$$-2\pi RF = \Delta E = -m(v + \Delta v)^2/2 + mv^2/2 = -mv\Delta v.$$

Stąd szukana zmiana prędkości satelity:

$$\Delta v = 2\pi F\sqrt{R}/m\sqrt{g} = 0{,}25 \text{ m/s}.$$

721. Wewnątrz metalowej powłoki nie ma pola elektrycznego, zatem zgodnie z prawem Gaussa na wewnętrznej powierzchni tej powłoki znajduje się ładunek $Q_1 = -\,(Q + q)$, który podobnie jak ładunek Q na kuli jest rozłożony nierównomiernie. Na zewnętrznej powierzchni powłoki znajduje się ładunek $Q_2 = 2Q - Q_1 = 3Q + q$. Jest on rozłożony równomiernie, bo potencjał powłoki jest stały, zatem pole elektryczne na zewnątrz powłoki jest takie jak od ładunku punktowego Q_2 umieszczonego w środku kuli. Stąd potencjał powłoki wynosi

$$V_P = kQ_2/3a = Q_2/12\pi\varepsilon_0 a = (3Q + q)/12\pi\varepsilon_0 a,$$

gdzie ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni. Potencjał kuli o promieniu R jest sumą potencjałów od ładunku punktowego, ładunków na powierzchni kuli oraz na obu powierzchniach powłoki. Najłatwiej policzyć go w środku kuli, bo wtedy odległość ładunków na danej powierzchni od środka kuli jest taka sama. Na przykład potencjał od ładunków na powierzchni kuli wynosi $V_1 = \sum_i Q_i/4\pi\varepsilon_0 R = Q/4\pi\varepsilon_0 R$. Potencjał kuli dany jest wzorem

$$V_K = k(Q/R + q/a + Q_1/2a + Q_2/3a),$$

gdzie $k = 1/4\pi\varepsilon_0$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$V_K = [3Q\,(2a + R) + 5qR]/24\pi\varepsilon_0 aR.$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.