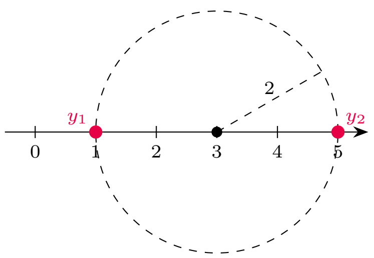
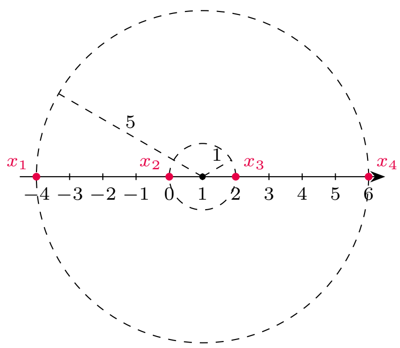
Bezwzględne matrioszki

*Paweł Rafał BIELIŃSKI**

* Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski





Najprostsze równania, jakie spotykamy np. w zadaniach tekstowych, mają zwykle jedno i tylko jedno rozwiązanie. Czasem zdarza się, że nie mają ich wcale, albo mają nieskończenie wiele. Natomiast najbardziej podstawowe równanie z wartością bezwzględną

$$|x-a| = r$$

może mieć 0, 1 albo 2 rozwiązania, zależnie od wartości parametru r. Rozwiązując je, warto podeprzeć się interpretacją geometryczną: wielkość $|s-t|$ jest odległością punktów, które na osi liczbowej odpowiadają liczbom s i t. Mówiąc krócej, jest to odległość liczby s od liczby t.

Okazuje się, że używając wartości bezwzględnej, można stworzyć równanie o dowolnej pożądanej liczbie rozwiązań. Przedstawienie odpowiedniej konstrukcji jest celem niniejszego artykułu.

Inspiracja

Na początek rozprawmy się z równaniami $||x-a|-b| = c$. Rozwiążemy szczególny przypadek

$$||x-1|-3| = 2.$$

Przyjmując na chwilę oznaczenie $|x-1| = y$, widzimy, że x jest rozwiązaniem podanego równania, jeśli i tylko jeśli y jest rozwiązaniem prostszego równania $|y-3| = 2$. Zatem y jest liczbą odległą o 2 od 3, czyli $y = 1$ albo $y = 5$.

Teraz zauważmy, że x rozwiązuje równanie wyjściowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem któregokolwiek z równań:

$$\text{a. } |x-1| = 1 \qquad \text{b. } |x-1| = 5.$$

Przy tym w przypadku a. otrzymujemy $x = 0$ albo $x = 2$, zaś w b. mamy $x = -4$ albo $x = 6$. Rozwiązaniami wyjściowego równania są wszystkie liczby -4, 0, 2, 6.

Otrzymaliśmy więc cztery różne rozwiązania. Stało się tak dlatego, że do każdej wartości y prowadziły dwie wartości x. Nie musiało tak być – Czytelnik zechce sam się przekonać, rozwiązując równania zaproponowane na marginesie.

Przekonaliśmy się właśnie, że otrzymane dwa przypadki mogą mieć różną liczbę rozwiązań, co oczywiście wpływa zasadniczo na rozwiązania równania wyjściowego. W szczególności, może ono nie mieć rozwiązań, nawet jeśli otrzymaliśmy dwie różne wartości pomocniczej niewiadomej y.

Zwróćmy też uwagę, że pomiędzy tymi przypadkami nie może zaistnieć „kolizja", tzn. nie mogą one prowadzić do wspólnego rozwiązania. Istotnie, dla różnych wartości y_1 i y_2 odległość x od a nie może być naraz równa y_1 i y_2. Wobec tego żadna liczba nie może być jednocześnie rozwiązaniem równań $|x-a| = y_1$ i $|x-a| = y_2$.

Liczba rozwiązań równania $||x-a|-b| = c$ zależy więc jedynie od rozwiązań równania pomocniczego $|y-b| = c$. Każde jego rozwiązanie $y > 0$ generuje dwa dodatkowe rozwiązania x, rozwiązanie $y = 0$ daje jedynie $x = a$, wreszcie $y < 0$ nie daje żadnego nowego x.

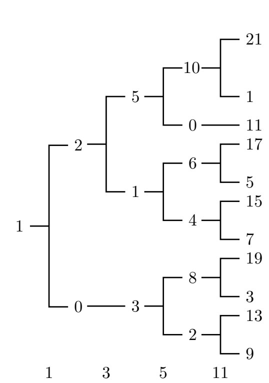
Uogólnienie

Popatrzmy na doświadczenie ostatniego przykładu nieco szerzej. Jeśli dane są liczby $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, to liczb x, które spełniają którekolwiek z równań $|x-a| = y_1$, $|x-a| = y_2$, $\ldots$, $|x-a| = y_n$ jest dokładnie $2n$. Przy tym jeśli $a > y_n$, to wszystkie one są dodatnie; jeśli $a = y_n$, to jednym z tych rozwiązań jest 0.

Wykorzystując ten fakt, możemy z równania o pewnej liczbie n dodatnich rozwiązań skonstruować nowe, które ma $2n$ rozwiązań dodatnich lub $2n-1$ dodatnich i jedno równe 0. Natomiast z równania o $n-1$ rozwiązaniach dodatnich i jednym zerowym możemy, tą samą metodą, uzyskać nowe, o $2n-1$ rozwiązaniach.

Na przykład równanie $|y-5| = 1$ ma dwa dodatnie rozwiązania: 4 i 6. Aby uzyskać z niego równanie o czterech dodatnich rozwiązaniach, wybierzemy liczbę większą niż 6, np. 10, i uzyskamy $||x-10|-5| = 1$. Gdybyśmy jednak chcieli, by jednym z rozwiązań było 0, wybralibyśmy liczbę 6 i zapisali $||x-6|-5| = 1$.

Dzięki tym obserwacjom łatwo uzasadnić, że równanie z wartością bezwzględną może mieć dowolną z góry zadaną liczbę rozwiązań. Przeprowadzenie szczegółowego dowodu, być może z użyciem wzmocnionej zasady indukcji, pozostawiamy Czytelnikowi. Tutaj zadowolimy się pokazaniem konstrukcji na jeszcze jednym przykładzie.



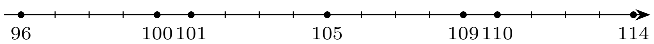
Stwórzmy mianowicie równanie o dokładnie 11 dodatnich rozwiązaniach. Najpierw ustalmy, jakie równania pomocnicze będą nam potrzebne:

a. $11 = 2 \cdot 6 - 1$,
b. $6 = 2 \cdot 3$,
c. $3 = 2 \cdot 2 - 1$,
d. $2 = 2 \cdot 1$.

Następnie budujemy te równania, w kolejności odwrotnej niż otrzymana powyżej:
d. $|x-1|=1$ (2 rozwiązania, największe 2),
c. $||x-3|-1|=1$ (3 rozwiązania, największe 5),
b. $|||x-5|-3|-1|=1$ (6 rozwiązań, największe 10),
a. $||||x-11|-5|-3|-1|=1$ (11 rozwiązań).
Czytelnik Wnikliwy zechce przedstawić na osi liczbowej rozwiązania kolejnych równań $a.-d.$ wraz z kolejno dobieranymi parametrami: 1, 3, 5, 11. Będzie to z pewnością ciekawe i pouczające doświadczenie.

Zadania

1. Ułóż równanie z wartością bezwzględną, które ma 6 rozwiązań dodatnich i 8 ujemnych.
2. Ułóż równanie z wartością bezwzględną, którego rozwiązaniami są wyłącznie liczby 96, 100, 101, 105, 109, 110, 114.



3. Operacja $*$ działa na liczby całkowite i jest określona następująco: jeśli n jest liczbą parzystą, to $n* = n/2$; w przeciwnym przypadku $n* = n+5$. Rozwiąż następujące równania:
a. $n**** = 211$,
b. $(((n+11)*+11)*+11)* = 11$,
c. $(((n+38)*+38)*+38)* = 31$.

4. Wyjaśnij, od czego i w jaki sposób zależy liczba rozwiązań równania $(((n+a)*+b)*+c)* = d$.

5. Operacja & działa na liczby całkowite i jest określona następująco: jeśli n jest liczbą podzielną przez 3, to $\&n = n/3$; w przeciwnym razie, jeśli n jest podzielna przez 2, to $\&n = n/2$; w pozostałych przypadkach $\&n = n+1$. Rozwiąż następujące równania:
a. $\&\&\&n = 101$ b. $\&(\&n+5) = 12$

6. Rozwiąż równanie $\&|(5x)*+1| = 13$. Zwróć uwagę, że $5x$ musi być liczbą całkowitą, ale x już niekoniecznie.

Rozwiązania zadań można znaleźć na stronie 16.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1687. Liczby całkowite dodatnie a, b są takie, że $a \mid b+1$. Udowodnij, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie x, y, z, że

$$a = \frac{x+y}{z} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{xy}{z}.$$

Rozwiązanie na str. 3

M 1688. Na okręgu znajduje się $n > 3$ punktów, każdy z nich pomalowany jest na czerwono lub niebiesko. Dla każdej trójki kolejnych punktów P, Q, R, jeśli P i R są pomalowane na ten sam kolor, to punkt Q można przemalować (z czerwonego na niebieski lub z niebieskiego na czerwony). Dla jakich n z dowolnego układu kolorów punktów można zrobić układ, w którym wszystkie punkty są w tym samym kolorze?
Rozwiązanie na str. 2

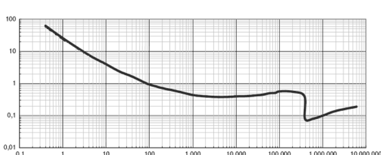
M 1689. W czworościanie $ABCD$ punkty I i J są środkami sfer: wpisanej i dopisanej (stycznej do ściany BCD). Niech prosta IJ przecina sferę opisaną na $ABCD$ w punkcie $K \neq A$. Który z odcinków jest dłuższy: IK czy JK?
Rozwiązanie na str. 1

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1033. Zadania dotyczące spadku swobodnego i rzutu ukośnego zwykle kończy polecenie: „zaniedbaj opór powietrza". Dla jakiego zakresu prędkości v ruchu metalowej kulki o średnicy $D = 1$ cm takie przybliżenie jest poprawne? Wiemy, że wartość siły oporu F podczas ruchu ciała w gazie wynosi:

$$F = \frac{1}{2} c \rho_p S v^2,$$

ρ_p jest gęstością gazu, S polem przekroju ciała prostopadle do kierunku prędkości, a c współczynnikiem zależnym od kształtu ciała. Wartość c jest funkcją liczby Reynoldsa $Re = \frac{vD}{\nu}$. Dla powietrza tzw. lepkość kinematyczna $\nu \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ m^2/s, a gęstość $\rho_p = 1{,}2$ kg/m^3. W zakresie wartości $400 \leqslant Re \leqslant 200\,000$ współczynnik $c \approx 0{,}5$. Przybliżenie uznamy za poprawne, gdy pominięta siła oporu stanowi nie więcej niż $\varepsilon = 0{,}05$ ciężaru kulki. Porównaj wyniki dla kulki stalowej o gęstości $\rho_S = 8000$ kg/m^3 i aluminiowej o $\rho_{Al} = 2700$ kg/m^3. Przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81$ m/s^2.
Rozwiązanie na str. 7



Zależność współczynnika c od liczby Reynoldsa dla kuli. Źródło: Wikipedia

F 1034. Podczas badań powierzchni ciał stałych na świeżo utworzonej powierzchni (np. po rozłupaniu kryształu) osadzają się cząsteczki gazu otaczającego próbkę. Jak szybkość osadzania się cząsteczek gazu zależy od jego ciśnienia p nad powierzchnią próbki?
Rozwiązanie na str. 18