www.youtube.com/watch?v=RhpVSV6iCko&t=1s

web.williams.edu/Mathematics/lg5/394/ArnoldQuintic.pdf

i tak dalej. W szczególności, permutacja $\langle 2,3,4,5,1\rangle$ jest ko^{n}mutatorem dla dowolnego n. Aby dowieść, że formuła z n-krotnym zagęszczeniem operacji pierwiastkowania nie może działać, wystarczy powołać się na istnienie 2^n permutacji, których ko^{n}mutacja daje permutację $\langle 2,3,4,5,1\rangle$. Następnie ko^{n}mutujemy pętle na współczynnikach związane z tymi permutacjami rozwiązań. Wiemy, że uzyskana w ten sposób pętla dopuszcza taką interpretację naszej formuły, która sama jest pętlą – a to już jest sprzeczność, bo każde rozwiązanie zmieniło swoje miejsce.

Uniwersalne formuły dla równań 3 i 4 stopnia podajemy dla postaci, które przy użyciu prostego, liniowego podstawienia zostały uproszczone (współczynnik wiodący = 1, kolejny współczynnik = 0).
Uniwersalnym rozwiązaniem równania $x^3+px+q=0$ jest

$$C-\frac{p}{3C},$$

gdzie

$$C=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Uniwersalnym rozwiązaniem równania $x^4+px^2+qx+r=0$ jest

$$\frac{\sqrt{2m}+\sqrt{-\left(2p+2m+\frac{2q}{\sqrt{2m}}\right)}}{2},$$

gdzie m jest rozwiązaniem równania

$$8m^3+8pm^2+(2p^2-8r)m-q^2=0.$$

Uff... finisz był bardzo intensywny. Ideę tego rozumowania dużo łatwiej przyswoić, jeśli faktycznie możemy poobserwować zależności między ruchem pierwiastków wielomianu i jego współczynników. Możliwość taką daje filmik *Short proof of Abel's theorem that 5th degree polynomial equations cannot be solved* autorstwa Boaza Katza, do odnalezienia na YouTubie. Ponadto tym, którzy chcieliby zapoznać się z odrobinę bardziej formalnym przedstawieniem tematu, polecam artykuł Leo Goldmahera *Arnold's elementary proof of the insolvability of the quintic*, z którego ten tekst mocno korzysta. Czytelnicy Obyci w Temacie wiedzą, że obecnie studenci kierunków matematycznych poznają twierdzenie Abela jako przykład zastosowania teorii Galois. Dzięki niej możemy stwierdzić, że żadna liczba rzeczywista możliwa do uzyskania z liczb wymiernych przy użyciu standardowych operacji arytmetycznych oraz pierwiastkowania nie może być rozwiązaniem równania $x^5-x-1=0$. W tym względzie teoria Galois daje nam więcej – nie wymaga „ogólnego wzoru na rozwiązania". Z drugiej strony, przedstawione podejście obejmuje pierwiastkowanie oraz *dowolne ciągłe przekształcenia* liczb zespolonych, nie tylko dodawanie, mnożenie i dzielenie, a to zawsze jakaś kokorzyść.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1684. Czy istnieje taki trójmian kwadratowy $f(x)$ o współczynnikach całkowitych, że (a) $f(f(\sqrt{2}))=0$? (b) $f(f(\sqrt{3}))=0$? (c) $f(f(\sqrt{5}))=0$?
Rozwiązanie na str. 7

M 1685. Ahmed pomnożył wszystkie dzielniki liczby naturalnej n. Hamza zwiększył każdy dzielnik o 1, a następnie pomnożył wyniki. Liczba Hamzy jest podzielna przez liczbę Ahmeda. Dla jakich n jest to możliwe?
Rozwiązanie na str. 15

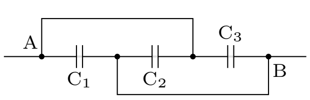
M 1686. W pola tablicy $3\times n$ wpisano liczby naturalne. Wiadomo, że każdy z trzech wierszy zawiera każdą z liczb 1, 2, ..., n. Okazało się jednak, że dla każdej kolumny suma iloczynów par trzech liczb w niej zawartych jest wielokrotnością n. Dla jakich n jest to możliwe?
Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1031. Od 20 maja 2019 roku jednostki Układu SI zdefiniowane są poprzez przyjęcie jako znanych **dokładnie** wartości 7 stałych. Są to:

- częstotliwość nadsubtelnego przejścia w atomach cezu 133 w niezaburzonym stanie podstawowych, $\Delta\nu_{Cs}=9\ 192\ 631\ 770$ Hz,
- prędkość światła w próżni, $c=299\ 792\ 458$ m/s,
- stała Plancka, $h=6{,}626\ 070\ 15\cdot 10^{-34}$ J·s,
- ładunek elementarny, $e=1{,}602\ 176\ 634\cdot 10^{-19}$ C,
- stała Boltzmanna, $k=1{,}380\ 649\cdot 10^{-23}$ J/K,
- stała Avogadra, $N_A=6{,}022\ 140\ 76\cdot 10^{23}$ 1/mol,
- skuteczność świetlna promieniowania o częstotliwości $540\cdot 10^{12}$ Hz, $K_{cd}=683$ lm/W.

Oznacza to, że teraz, np. 1 m $=30{,}663318988\ldots c/\Delta\nu_{Cs}$. Podaj obecnie obowiązujące definicje jednostek: 1 kg, 1 Ω.
Rozwiązanie na str. 5



F 1032. Ile wynosi pojemność przedstawionego na rysunku układu kondensatorów między punktami A i B?
Rozwiązanie na str. 8