# Zabawy na polu

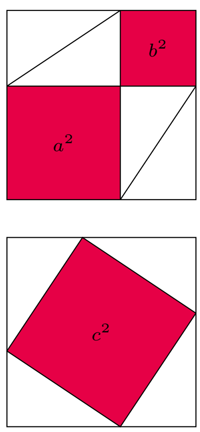
*Bartłomiej BZDĘGA*

Pole wielokąta to funkcja, która każdemu wielokątowi przypisuje pewną liczbę rzeczywistą nieujemną oraz spełnia następujące warunki:

(1) pole prostokąta o bokach długości $a$ i $b$ jest równe $ab$;
(2) pola wielokątów przystających są równe;
(3) jeśli pewien wielokąt podzielono na skończoną liczbę rozłącznych wielokątów, to suma ich pól jest równa polu tego wielokąta.

Czytelnikowi, który nigdy wcześniej tego nie zrobił, polecam, jako cenne ćwiczenie, wyprowadzenie wzorów na pole kolejno: trójkąta prostokątnego, trójkąta dowolnego, równoległoboku i trapezu, z wykorzystaniem jedynie powyższych trzech własności pola. Ogólniej – pozwalają one na obliczenie pola dowolnego wielokąta, ponieważ każdy wielokąt można podzielić na trójkąty.

**Najprostszy dowód twierdzenia Pitagorasa**




Stosowanie pola w rozwiązywaniu zadań często opiera się na wykorzystaniu warunków (1–3) do bezrachunkowego dowodzenia pewnych równości. Dobrym przykładem jest dowód twierdzenia Pitagorasa, który zamieściliśmy na marginesie. Niekiedy efekty przynosi liczenie pola tej samej figury kilkoma różnymi sposobami i porównywanie wyników. Oprócz tego podaję jeszcze kilka faktów, które warto znać; ich nietrudne dowody pozostawiam Czytelnikowi. Zapis $[\mathcal{F}]$ oznaczać będzie pole figury $\mathcal{F}$.

**Pole trójkąta a równoległość.** Niech $A$, $B$, $C$, $D$ będą czterema różnymi punktami, przy czym punkty $C$ i $D$ leżą po tej samej stronie prostej $AB$. Wówczas $AB \parallel CD$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[ABC] = [ABD]$.

**Pole i proporcje.** Stosunek pól trójkątów o równych wysokościach jest równy stosunkowi długości ich podstaw. Stosunek pól wielokątów podobnych jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa.

**Pole wielokąta opisanego.** Jeśli wielokąt $\mathcal{W}$ o obwodzie $L$ jest opisany na okręgu o promieniu $r$, to $[\mathcal{W}] = \frac{1}{2}rL$.

**Zadania**

1. W pewnym trójkącie długość jednego z boków jest równa średniej arytmetycznej długości pozostałych boków. Analogicznie jest dla wysokości – długość jednej z nich jest średnią arytmetyczną długości dwóch pozostałych. Udowodnić, że ten trójkąt jest równoboczny (XII WLM, Wielkopolska Liga Matematyczna; *wlm.wmi.amu.edu.pl*).
2. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt $E$ leży na odcinku $AB$, a punkt $F$ na odcinku $AD$. Prosta $EF$ przecina proste $CB$ i $CD$ w punktach, odpowiednio, $P$ i $Q$. Wykazać, że $[CEF] = [APQ]$ (I OMG).
3. Dowieść, że wewnątrz każdego trójkąta $ABC$ istnieje punkt $P$ o następującej własności: każda prosta przechodząca przez punkt $P$ dzieli obwód trójkąta $ABC$ w takim samym stosunku, w jakim dzieli ona jego pole (LII OM).
4. Pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły i spełnia warunki $AB \parallel CE$, $BC \parallel DA$, $CD \parallel EB$, $DE \parallel AC$. Wykazać, że $EA \parallel BD$ (IX WLM).
5. Wysokość opuszczona na bok $BC$ trójkąta ostrokątnego $ABC$ ma długość równą średniej arytmetycznej długości jego wszystkich boków. Okręgi $o_1$ i $o_2$ są styczne zewnętrznie i mają jednakowe promienie $r$. Ponadto okrąg $o_1$ jest styczny do odcinków $AB$ i $BC$, natomiast okrąg $o_2$ jest styczny do odcinków $BC$ i $CA$. Dowieść, że $|BC| = 5r$ (V WLM).
6. Wielokąt opisany na okręgu o promieniu $r$ rozcięto na $n$ trójkątów, w które wpisano okręgi o promieniach $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Dowieść, że $r \leqslant r_1 + r_2 + \ldots + r_n$.
7. Na bokach $BC$, $CA$ i $AB$ trójkąta $ABC$ znajdują się punkty, odpowiednio, $P$, $Q$, $R$. Udowodnić, że odcinki $AP$, $BQ$, $CR$ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1$ (twierdzenie Cevy).
8. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem oraz punkt $X$ w jego wnętrzu. Niech $M$ i $N$ będą środkami przekątnych $AC$ i $BD$ tego czworokąta. Udowodnić, że $[ABX] + [CDX] = [BCX] + [DAX]$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt $X$ leży na prostej $MN$ (prosta Newtona; twierdzenie Annego).
9. Przy założeniach z poprzedniego zadania dowieść, że jeśli czworokąt $ABCD$ opisany jest na okręgu o środku $I$, to punkt $I$ leży na prostej $MN$ (twierdzenie Newtona).

**Wskazówki do zadań**

1. Jeśli $a-x$, $a$, $a+x$ są długościami boków tego trójkąta, to długości opuszczonych na nie wysokości wynoszą odpowiednio $h+y$, $h$, $h-y$ $(x, y \geqslant 0)$.
2. Skorzystać z równości $[AEC] = [AEQ]$ i $[AFC] = [AFP]$.
3. Tę własność ma środek okręgu wpisanego w trójkąt.
4. Zamienić równoległości na równości pól trójkątów: $[ABC] = [ABE]$ itp.
5. Podzielić trójkąt $ABC$ na trapez i trzy trójkąty za pomocą środków okręgów $o_1$ i $o_2$.
6. Niech $L_i$ oraz $P_i$ oznaczają, odpowiednio, obwód i pole $i$-tego trójkąta. Skorzystać z szacowania $2P_i = r_iL_i \leqslant r_iL$.
7. Niech $T$ będzie punktem przecięcia odcinków $AP$ i $BQ$. ($\Rightarrow$) Udowodnić równość $\frac{|AR|}{|RB|} = \frac{[CTA]}{[BTC]}$ i dwie analogiczne. ($\Leftarrow$) Niech $R'$ będzie punktem przecięcia $CT$ i $AB$. Wykazać, korzystając z poprzedniej implikacji, że jeśli $R' \neq R$, to $\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} \neq 1$.
8. Niech $PQ$ będzie dowolnym odcinkiem wewnątrz czworokąta $ABCD$. Wykazać, że jeśli $X$ leży na odcinku $PQ$ i $|PX| = x$, to wartość wyrażenia $[ABX] + [CDX]$ jest funkcją liniową zmiennej $x$. Wystarczy zatem wykazać, że $[ABX] + [CDX] = \frac{1}{2}[ABCD]$ dla $X = M$ i $X = N$.
9. Wykorzystać poprzednie zadanie oraz własność czworokąta opisanego na okręgu.