Pętla na pierwiastki

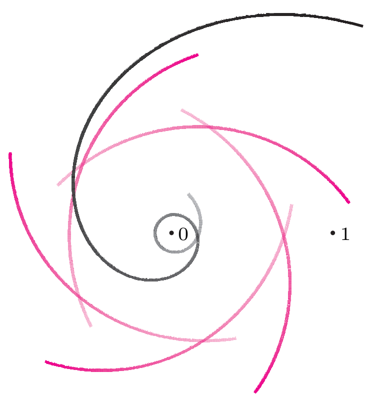
Łukasz RAJKOWSKI

Jeśli $a \neq 0$ i $ax^2 + bx + c = 0$, to
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Znakomita większość Czytelników *Delty* jest z pewnością dobrze zaznajomiona ze wzorami na rozwiązania równania kwadratowego (na marginesie). A duża część tej większości wie pewnie, że podobne wzory (używające standardowych operacji arytmetycznych oraz pierwiastkowania) można sformułować dla równań stopnia trzeciego i czwartego. Jednak dla równań piątego stopnia takie wzory nie istnieją. Twierdzenie to zostało udowodnione przez Nielsa Henrika Abela w roku 1824. W niniejszym artykule przybliżymy bardzo eleganckie rozumowanie przedstawione w 1963 roku przez Władimira Arnolda. Podamy je jednak w ograniczonym zakresie, o czym zaraz.

Cóż to bowiem oznacza, jeśli we „wzorze” występuje pierwiastkowanie? Okazuje się, że ta z pozoru niewinna operacja wymagać będzie poczynienia pewnych ustaleń. Co mam na myśli, pisząc $\sqrt{-1}$? Może to być i, a może to być $-i$, wybór dość arbitralny. W związku z tym potraktujemy *wzory na rozwiązania* w możliwie najbardziej restrykcyjny sposób – wymagać będziemy, by *każda interpretacja* takiego wzoru dawała rozwiązanie. Taki wzór na rozwiązania istnieje dla równania kwadratowego, słynne $(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ – niezależnie od wartości przypisanej pierwiastkowi dostaniemy rozwiązanie równania $az^2 + bz + c = 0$. Formuły o tej własności można przedstawić dla równań stopnia 3 i 4 (podajemy je na końcu artykułu). Uzasadnimy, że taki uniwersalny wzór nie istnieje dla równania stopnia 5. Ale najpierw kilka definicji, z pozoru niezwiązanych z naszym problemem.

Aby nie popaść w skrajność, przyjmijmy, że jeśli we wzorze występuje „ten sam” pierwiastek w różnych miejscach, to jego interpretacja jest wszędzie ta sama. Dla przykładu, uznajemy, że formuła $\sqrt{a} + b/\sqrt{a}$ ma dwie interpretacje, nie cztery.



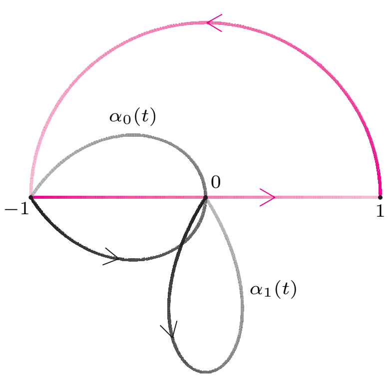
Rys. 1. Pewna czarna ścieżka oraz jej pięć kolorowych ścieżwiastków 5 stopnia. Blaknięcie krzywych odpowiada upływowi czasu t

Ścieżka to każda funkcja ciągła $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, a *pętla* to ścieżka, która zaczyna się i kończy w tym samym miejscu (tzn. $\gamma(0) = \gamma(1)$). Ścieżki (pętle) można dodawać, tzn. jeśli γ_1 i γ_2 są ścieżkami (pętlami), to $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$ też jest ścieżką (pętlą). Podobnie z odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem (to ostatnie, jeśli ostrożnie omijamy zero), zresztą z każdym ciągłym przekształceniem na zbiorze liczb zespolonych. Pierwiastkowanie wymaga pewnej ostrożności. Każda niezerowa liczba zespolona ma dokładnie k pierwiastków k-tego stopnia; podobnie każda ścieżka γ nieprzechodząca przez 0 ma k „ścieżek-pierwiastków” (*ścieżwiastków*) k-tego stopnia, tzn. takich ścieżek α, że $\alpha(t)^k = \gamma(t)$ dla każdego $t \in [0,1]$. Z pętlami jest jeszcze gorzej, gdyż nie każda pętla ma „pętlę-pierwiastek” (*pętlastek*). Dla przykładu, pętla $\gamma(t) = e^{i2\pi t}$ ma dwa ścieżwiastki kwadratowe, $\alpha_1(t) = e^{i\pi t}$ oraz $\alpha_2(t) = -e^{i\pi t}$, z których żaden nie jest pętlą. Są jednak pętle wyjątkowe, które pętlastki mają (np. $e^{i4\pi t}$ ma pętlastek kwadratowy), i te będą dla nas dość istotne.

W tym miejscu i dalej polecamy samodzielnie eksperymentować z zależnościami między pierwiastkami wielomianu a jego współczynnikami przy użyciu apletu stworzonego przez Leo C. Steina, udostępnionego na stronie `duetosymmetry.com/tool/polynomial-roots-toy/`

Spróbujmy wreszcie coś udowodnić. Rozpoczniemy od wykazania, że we wzorach na rozwiązania równania kwadratowego musi występować pierwiastkowanie. Nie jest to zbyt odkrywcze, ale przecież *nie od razu Kraków zbudowano*. Przypuśćmy, że istnieje taki „wzór” $F(a_0, a_1)$, złożony z dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, że $F(a_0, a_1)$ zawsze jest pierwiastkiem równania $z^2 + a_1 z + a_0$. Rozważmy równanie $z^2 - 1 = 0$, którego pierwiastkami są liczby -1 i 1, więc któraś z tych liczb to wartość $F(-1, 0)$. Wyobraźmy sobie teraz, że w sposób ciągły modyfikujemy nasze wyjściowe równanie tak, by rozwiązania -1 i 1 „zamieniły się miejscami”, jedno poruszając się po łuku okręgu, a drugie po prostej. Odpowiada to współczynnikom a_0, a_1 zmieniającym się wzdłuż pętli $\alpha_0(t)$ i $\alpha_1(t)$ określonych równaniem

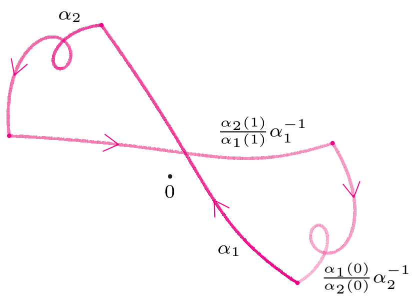
(1) $$z^2 + \alpha_1(t) z + \alpha_0(t) = (z - e^{i\pi t})\big(z - (2t - 1)\big) =: P_t(z).$$



Rys. 2. Na czarno oznaczono pętle $\alpha_0(t)$ i $\alpha_1(t)$. Jeśli będziemy zmieniać wzdłuż nich współczynniki trójmianu kwadratowego $P_t(z)$, to jego pierwiastki zamienią się miejscami, tak jak pokazują kolorowe krzywe

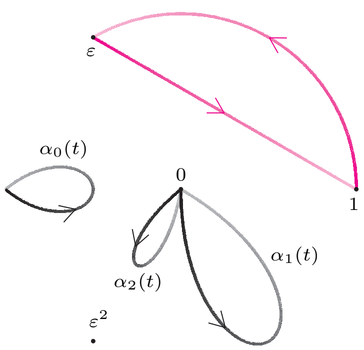
Ponieważ funkcja F jest ciągła, więc $\gamma(t) = F\big(\alpha_0(t), \alpha_1(t)\big)$ również jest ścieżką, a nawet pętlą, gdyż początkowa i końcowa postać wielomianu są tożsame, $P_0 = P_1$. Jednakże ta pętla powinna cały czas „śledzić” jeden z pierwiastków wielomianu $P_t(z)$, a te w sposób ciągły zamieniły się miejscami (nie spotykając się nigdzie po drodze). Zatem z jednej strony γ jest pętlą, a z drugiej dla $t = 0$ i $t = 1$ wskazuje na różne rozwiązania równania $z^2 - 1 = 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje ciągła funkcja współczynników wielomianu kwadratowego, która zawsze wskazuje na jeden z jego pierwiastków.

Zaznaczmy tutaj, że znany wzór na rozwiązania równania kwadratowego nie przeczy temu stwierdzeniu, gdyż pierwiastek kwadratowy nie może zostać w sposób ciągły określony na zbiorze liczb zespolonych (przypomnijmy przykład braku pętlastka z pętli $e^{i2\pi t}$). Pojedyncza operacja pierwiastkowania wystarcza, aby naprawić sytuację z równaniami kwadratowymi. Pokażemy teraz, że to za mało, by poradzić sobie z równaniami stopnia 3, które wymagać będą *pierwiastkowania zagnieżdżonego* (czyli operacji w stylu $\sqrt[3]{a_0 - \sqrt{a_1 + a_2}}$). W tym celu potrzebujemy systematycznego sposobu tworzenia pętli, które mają pętlastki. Temu poświęcony będzie kolejny akapit.



Rys. 3. Tak może wyglądać pętlastek z komutatora

Pętle zaczynające się w tym samym punkcie możemy *składać*, czyli chodzić najpierw wzdłuż jednej, a potem wzdłuż drugiej. Formalnie, jeśli γ jest złożeniem γ_1 i γ_2, to $\gamma(t)$ jest równe $\gamma_1(2t)$ dla $t \leqslant \frac{1}{2}$ i $\gamma_2(2t-1)$ dla $t \geqslant \frac{1}{2}$, co zapisujemy jako $\gamma = \gamma_2\gamma_1$. Podobnie, pętle można *odwracać* (tzn. obiegać je „w drugą stronę"); odwrotność pętli γ to pętla $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. To samo możemy robić ze ścieżkami, przy czym składać dwie ścieżki możemy tylko wtedy, gdy koniec jednej pokrywa się z początkiem drugiej. Jeśli γ_1 i γ_2 są pętlami zaczynającymi się w tym samym punkcie, to możemy utworzyć z nich pętlę $\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2\gamma_1$ zwaną *komutatorem* γ_1 i γ_2, oznaczaną $[\gamma_1, \gamma_2]$. Komutowanie pętli to zatem pewna specyficzna instrukcja, postaci: „najpierw przebiegnij pierwszą pętlę, potem drugą, potem pierwszą w przeciwnym kierunku niż na początku, a potem tak samo z drugą". Wynika stąd, że jeśli weźmiemy kilka komutatorów i je dodamy lub pomnożymy, lub przekształcimy w jakikolwiek ciągły sposób, to w efekcie też dostaniemy pewien komutator – pomimo dość nieprzyjemnego sformułowania fakt ten jest raczej oczywisty. Zwróćmy teraz uwagę, że jeśli γ_1 i γ_2 są pętlami zaczynającymi się w tym samym punkcie, to ich komutator $[\gamma_1, \gamma_2]$ ma pętlastek (dowolnego stopnia). Istotnie, niech α_1 będzie ścieżwiastkiem z γ_1 i niech α_2 będzie takim ścieżwiastkiem z γ_2, który zaczyna się w końcu α_1 (możemy taki wybrać, gdyż γ_1, γ_2 zaczynają się w tym samym miejscu). Wówczas pętla $\left(\frac{\alpha_1(0)}{\alpha_2(0)}\alpha_2^{-1}\right)\left(\frac{\alpha_2(1)}{\alpha_1(1)}\alpha_1^{-1}\right)\alpha_2\alpha_1$ jest pętlastkiem z $[\gamma_1, \gamma_2]$.



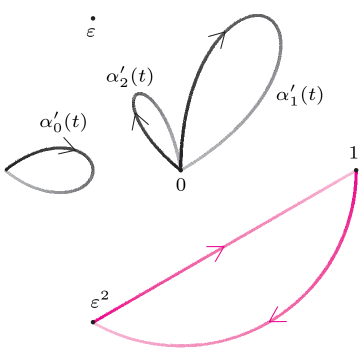
Rys. 4. Czarne pętle to $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ i $\alpha_2(t)$; odpowiada im zamiana rozwiązań 1 i ε, oznaczona kolorem (rozwiązanie ε^2 „stoi w miejscu")

Udowodnimy teraz, że wzory na rozwiązania równań stopnia 3 muszą zawierać „zagnieżdżone pierwiastkowanie". Niech $F(a_0, a_1, a_2)$ będzie wzorem złożonym ze standardowych operacji arytmetycznych i „niezagnieżdżonego" pierwiastkowania (proponuję myśleć o pewnej konkretnej postaci, na przykład $F(a_0, a_1, a_2) = \sqrt{a_0 + a_1} + \sqrt[3]{a_1 a_2}$). Przypuśćmy, że każda interpretacja $F(a_0, a_1, a_2)$ daje pewien pierwiastek równania $z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$. Rozważmy równanie $z^3 - 1 = 0$. Ma ono trzy pierwiastki, $\varepsilon = e^{2i\pi/3}$, $\varepsilon^2 = e^{4i\pi/3}$ oraz $\varepsilon^3 = 1$. Niech $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ i $\alpha_2(t)$ będą pętlami współczynników $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ powstałymi przy ciągłej zamianie miejscami pierwiastków 1 i ε (przy czym zamiana ma przebiegać po rozłącznych ścieżkach), np.

$$z^3 + \alpha_2(t)z^2 + \alpha_1(t)z + \alpha_0(t) = (z - e^{2it\pi/3})\big(z - t - (1-t)\varepsilon\big)(z - \varepsilon^2). \tag{2}$$

Podobnie zdefiniujmy pętle $\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2'$, tym razem zamieniając pierwiastki 1 i ε^2.

$$z^3 + \alpha_2'(t)z^2 + \alpha_1'(t)z + \alpha_0'(t) = (z - e^{-2it\pi/3})(z - \varepsilon)\big(z - t - (1-t)\varepsilon^2\big). \tag{3}$$



Rys. 5. Czarne pętle to $\alpha_0'(t)$, $\alpha_1'(t)$ i $\alpha_2'(t)$ (nie powinno zaskakiwać, że są symetryczne do swoich nieprimowanych odpowiedników)

Niech teraz $\beta_i = [\alpha_i, \alpha_i']$, $i = 0, 1, 2$. Przypomnijmy, że każda z pętli β_i ma pętlastek (gdyż jest komutatorem dwóch pętli). W tej sytuacji, ponieważ formuła F nie posiada zagnieżdżonych pierwiastków, to istnieje taka pętla $\gamma(t)$, która wszędzie jest pewną interpretacją $F\big(\beta_0(t), \beta_1(t), \beta_2(t)\big)$. Z drugiej strony ta pętla musi cały czas „śledzić" ruch któregoś z pierwiastków $1, \varepsilon, \varepsilon^2$. Czy tym pierwiastkiem może być 1? Niespecjalnie, gdyż najpierw 1 przechodzi na ε, potem ε stoi w miejscu, następnie przechodzi na 1, a na koniec 1 przechodzi na ε^2, czyli inny od 1 pierwiastek. Podobnie dwa pozostałe pierwiastki nie wracają na swoje miejsca. Ich wędrówka wygląda tak: $\varepsilon \to 1 \to \varepsilon^2 \to \varepsilon^2 \to 1$ oraz $\varepsilon^2 \to \varepsilon^2 \to 1 \to \varepsilon \to \varepsilon$. Co dowodzi, że żaden z pierwiastków nie może być „śledzony", stąd sprzeczność. Formuła F musi zatem korzystać z zagnieżdżonego pierwiastkowania.

Nasze rozumowanie możemy podsumować następująco: w sposób ciągły i „bezkolizyjny" przeprowadziliśmy pierwiastek ε^k na ε^{k-1} $(k = 1, 2, 3)$ tak, że odpowiadające temu ruchowi pętle na współczynnikach dopuszczają taką interpretację wyrażenia F, która jest pętlą – jest to sprzeczność. Podobną strategię przyjmiemy, analizując równanie stopnia 5. Wykażemy, że dla dowolnego potencjalnego wzoru na rozwiązania możemy „przemieszać" rozwiązania wzdłuż takich ścieżek, że wynikające z tych ruchów pętle na

współczynnikach dopuszczały „pętlową” interpretację wzoru, a jednak żadne z rozwiązań nie pozostało na swoim miejscu. Aby dokładniej opisać ten zamiar, wygodnie będzie powiedzieć wcześniej kilka słów o permutacjach.

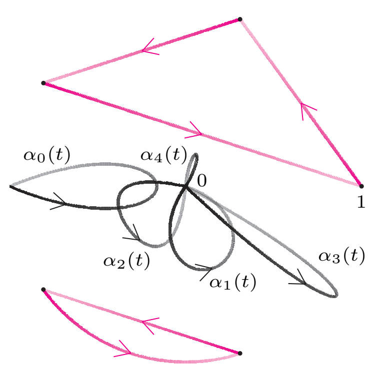
Przypomnijmy, że permutacja zbioru to dowolne przemieszanie jego elementów. A bardziej fachowo, dowolna bijekcja z tego zbioru w siebie. Skoncentrujemy się tutaj na permutacjach zbiorów postaci $\{1, 2, \ldots, n\}$, dzięki czemu wygodnie będzie je oznaczać – dla przykładu, przez permutację $\langle 3, 1, 2\rangle$ rozumiemy permutację σ zbioru $\{1, 2, 3\}$ taką, że $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$ i $\sigma(3) = 2$. Skoro permutacje to bijekcje, to możemy je składać i odwracać. Podobnie jak w przypadku pętli, potrafimy zatem *komutować* dwie permutacje; jeśli σ i τ są permutacjami, to $[\sigma, \tau] = \tau^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma$.

Wiemy już, że „żonglowanie” pierwiastkami wielomianu w sposób ciągły prowadzi do pętli na jego współczynnikach. Jest tu pewna oczywista odpowiedniość: jeśli pewne permutacje pierwiastków są realizowane przez pewne pętle na współczynnikach, to złożenie tych pętli prowadzi do złożenia permutacji. Podobnie odwrócenie pętli na współczynnikach prowadzi do odwrócenia związanej z nimi permutacji. W tej sytuacji, jeśli pętle α_i są związane z permutacją σ, a pętle β_i są związane z permutacją τ, to pętle $[\alpha_i, \beta_i]$ są związane z permutacją $[\sigma, \tau]$.

Wykażemy teraz, że podwójne zagnieżdżenie pierwiastkowania to za mało, aby rozwiązywać równania stopnia 5. Powiedzmy, że mamy formułę $F(a_0, \ldots, a_4)$, w której pierwiastkowanie jest zagęszczone co najwyżej dwukrotnie (dajmy na to $\sqrt[3]{a_0 - \sqrt{a_1 + a_2}} + \sqrt[5]{a_3 a_4}$), a każda jej interpretacja daje pewien pierwiastek równania $z^5 + \sum_{i=0}^{4} a_i z^i = 0$. Występujące w niej operacje pierwiastkowania podzielmy w naturalny sposób na „wewnętrzne” i „zewnętrzne” (w naszym przykładzie „wewnętrznym” pierwiastkowaniem jest $\sqrt{a_1 + a_2}$). W duchu poprzednich rozumowań, chcielibyśmy wskazać takie pętle na współczynnikach, by pewna interpretacja „zewnętrznych” pierwiastkowań była pętlą. Wiemy, że w tym celu wystarcza, aby to, co znajduje się pod każdym „zewnętrznym” pierwiastkowaniem, było komutatorem pętli. Trudność polega na tym, że pod „zewnętrznym” pierwiastkowaniem jest pierwiastkowanie „wewnętrzne”. Czego nam potrzeba, aby pierwiastkowanie „wewnętrzne” interpretować jako komutator? Jeśli pod tym „wewnętrznym” pierwiastkowaniem jest komutator, to możemy wynik zinterpretować jako pętlę. Weźmy zatem jeszcze jeden, inny komutator i najpierw „spętlastkujmy” pierwszy, potem drugi, potem pierwszy odwrotnie, a potem drugi odwrotnie – w efekcie dostaniemy już porządny komutator. Wystarcza zatem, aby to, co znajduje się pod „wewnętrznym” pierwiastkowaniem, było komutatorem komutatorów – w skrócie *kokomutatorem*. Jeśli każdy z argumentów formuły F będzie zmieniał wartość wzdłuż kokomutatora, to wartość F będziemy mogli interpretować jako pętlę.

Pętlastek z komutatora komutatorów to komutator pętlastków z komutatorów.

Przypomnijmy jednak, że te kokomutatory powinny mieć jeszcze jedną własność, aby był z nich dla nas pożytek – mają zmieniać położenie każdego rozwiązania naszego równania. Ze względu na przedstawioną wcześniej odpowiedniość między operacjami na pętlach i pierwiastkach równania, wystarczy odpowiedzieć sobie na pytanie, czy istnieje taka permutacja-kokomutator, która nie ma punktu stałego. Otóż istnieje, i aby się o tym przekonać, wystarczy wziąć $\sigma_1 = \langle 1, 3, 4, 2, 5\rangle$, $\sigma_2 = \langle 1, 2, 4, 5, 3\rangle$ oraz $\tau_1 = \langle 1, 3, 4, 2, 5\rangle$ i $\tau_2 = \langle 2, 3, 1, 4, 5\rangle$. Wówczas $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2] = \langle 1, 5, 4, 3, 2\rangle$ i $\tau = [\tau_1, \tau_2] = \langle 4, 3, 2, 1, 5\rangle$, i w końcu $[\sigma, \tau] = \langle 2, 3, 4, 5, 1\rangle$. Jak do tego doszliśmy? Przyznajmy szczerze, przy użyciu brutalnej, obliczeniowej siły. Cóż, wszystkich permutacji zbioru pięcioelementowego jest $5! = 120$, więc potencjalnych komutatorów jest „jedynie” $120^2 = 14\,400$. Jeśli odsiejemy (bądźmy uczciwi: nie my, tylko komputer) powtórzenia, zostaniemy z 60 możliwymi komutatorami. Potencjalnych kokomutatorów jest zatem $60^2 = 3600$, wśród których szczęśliwie znajdują się również permutacje pozbawione punktów stałych, jak na przykład $\langle 2, 3, 4, 5, 1\rangle$.



Rys. 6. Czarne pętle odpowiadają takim zmianom współczynników równania $z^5 - 1 = 0$, że jego rozwiązania zamieniają się miejscami wzdłuż kolorowych ścieżek, tzn. rozwiązanie $e^{k\cdot 2i\pi/5}$ przechodzi na $e^{\sigma(k)\cdot 2i\pi/5}$, gdzie $\sigma = \langle 2, 5, 4, 3, 1\rangle$

No dobrze, a co dla formuł o jeszcze większym zagęszczeniu operacji pierwiastkowania? Wróćmy do zbioru potencjalnych 3600 kokomutatorów. Okazuje się, że po usunięciu powtórzeń dostaniemy… wcześniejszy zbiór 60 komutatorów. Kontynuując, wnioskujemy, że zbiór kokokomutatorów też jest tożsamy ze zbiorem 60 komutatorów, tak samo ze zbiorem ko^{4}mutatorów www.youtube.com/watch?v=RhpVSV6iCko&t=1s

web.williams.edu/Mathematics/lg5/394/ArnoldQuintic.pdf

i tak dalej. W szczególności, permutacja $\langle 2,3,4,5,1\rangle$ jest ko^{n}mutatorem dla dowolnego n. Aby dowieść, że formuła z n-krotnym zagęszczeniem operacji pierwiastkowania nie może działać, wystarczy powołać się na istnienie 2^n permutacji, których ko^{n}mutacja daje permutację $\langle 2,3,4,5,1\rangle$. Następnie ko^{n}mutujemy pętle na współczynnikach związane z tymi permutacjami rozwiązań. Wiemy, że uzyskana w ten sposób pętla dopuszcza taką interpretację naszej formuły, która sama jest pętlą – a to już jest sprzeczność, bo każde rozwiązanie zmieniło swoje miejsce.

Uff... finisz był bardzo intensywny. Ideę tego rozumowania dużo łatwiej przyswoić, jeśli faktycznie możemy poobserwować zależności między ruchem pierwiastków wielomianu i jego współczynników. Możliwość taką daje filmik *Short proof of Abel's theorem that 5th degree polynomial equations cannot be solved* autorstwa Boaza Katza, do odnalezienia na YouTubie. Ponadto tym, którzy chcieliby zapoznać się z odrobinę bardziej formalnym przedstawieniem tematu, polecam artykuł Leo Goldmahera *Arnold's elementary proof of the insolvability of the quintic*, z którego ten tekst mocno korzysta. Czytelnicy Obyci w Temacie wiedzą, że obecnie studenci kierunków matematycznych poznają twierdzenie Abela jako przykład zastosowania teorii Galois. Dzięki niej możemy stwierdzić, że żadna liczba rzeczywista możliwa do uzyskania z liczb wymiernych przy użyciu standardowych operacji arytmetycznych oraz pierwiastkowania nie może być rozwiązaniem równania $x^5 - x - 1 = 0$. W tym względzie teoria Galois daje nam więcej – nie wymaga „ogólnego wzoru na rozwiązania". Z drugiej strony, przedstawione podejście obejmuje pierwiastkowanie oraz *dowolne ciągłe przekształcenia* liczb zespolonych, nie tylko dodawanie, mnożenie i dzielenie, a to zawsze jakaś kokorzyść.

Uniwersalne formuły dla równań 3 i 4 stopnia podajemy dla postaci, które przy użyciu prostego, liniowego podstawienia zostały uproszczone (współczynnik wiodący = 1, kolejny współczynnik = 0).
Uniwersalnym rozwiązaniem równania $x^3 + px + q = 0$ jest

$$C - \frac{p}{3C},$$

gdzie

$$C = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Uniwersalnym rozwiązaniem równania $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ jest

$$\frac{\sqrt{2m} + \sqrt{-\left(2p + 2m + \frac{2q}{\sqrt{2m}}\right)}}{2},$$

gdzie m jest rozwiązaniem równania

$$8m^3 + 8pm^2 + (2p^2 - 8r)m - q^2 = 0.$$

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1684. Czy istnieje taki trójmian kwadratowy $f(x)$ o współczynnikach całkowitych, że (a) $f(f(\sqrt{2})) = 0$? (b) $f(f(\sqrt{3})) = 0$? (c) $f(f(\sqrt{5})) = 0$?
Rozwiązanie na str. 7

M 1685. Ahmed pomnożył wszystkie dzielniki liczby naturalnej n. Hamza zwiększył każdy dzielnik o 1, a następnie pomnożył wyniki. Liczba Hamzy jest podzielna przez liczbę Ahmeda. Dla jakich n jest to możliwe?
Rozwiązanie na str. 15

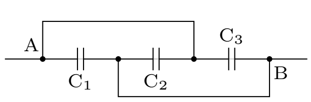
M 1686. W pola tablicy $3 \times n$ wpisano liczby naturalne. Wiadomo, że każdy z trzech wierszy zawiera każdą z liczb 1, 2, ..., n. Okazało się jednak, że dla każdej kolumny suma iloczynów par trzech liczb w niej zawartych jest wielokrotnością n. Dla jakich n jest to możliwe?
Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1031. Od 20 maja 2019 roku jednostki Układu SI zdefiniowane są poprzez przyjęcie jako znanych **dokładnie** wartości 7 stałych. Są to:

- częstotliwość nadsubtelnego przejścia w atomach cezu 133 w niezaburzonym stanie podstawowych, $\Delta\nu_{Cs} = 9\ 192\ 631\ 770$ Hz,
- prędkość światła w próżni, $c = 299\ 792\ 458$ m/s,
- stała Plancka, $h = 6{,}626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}$ J·s,
- ładunek elementarny, $e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C,
- stała Boltzmanna, $k = 1{,}380\ 649 \cdot 10^{-23}$ J/K,
- stała Avogadra, $N_A = 6{,}022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}$ 1/mol,
- skuteczność świetlna promieniowania o częstotliwości $540 \cdot 10^{12}$ Hz, $K_{cd} = 683$ lm/W.

Oznacza to, że teraz, np. 1 m = 30,663318988 ... $c/\Delta\nu_{Cs}$. Podaj obecnie obowiązujące definicje jednostek: 1 kg, 1 Ω.
Rozwiązanie na str. 5



F 1032. Ile wynosi pojemność przedstawionego na rysunku układu kondensatorów między punktami A i B?
Rozwiązanie na str. 8