Sam nie wiem, co się tu jeszcze mieści

Bartłomiej BZDĘGA

Ten odcinek kącika poświęcony jest zadaniom, w których musimy rozstrzygać, czy dana liczba obiektów pewnego rodzaju mieści się na określonym obszarze. Najczęściej pytamy o największą możliwą liczbę obiektów (niech m będzie tą liczbą) – w takim przypadku rozwiązanie zadania powinno się składać z dwóch części:

(1) wykazania, że m obiektów się zmieści;
(2) wykazania, że nie zmieści się ich więcej niż m.

Jako przykład rozwiążemy następujące zadanie:

0. Na kwadracie o boku 2 należy wybrać największą możliwą liczbę punktów, tak by odległość pomiędzy każdymi dwoma z nich była nie mniejsza niż 1.

Część (1) jest zazwyczaj prostsza – tu wystarczy podać jedno rozmieszczenie największej możliwej liczby punktów. Nietrudno zgadnąć, że jest ich 9: w narożnikach, na środkach boków i na środku kwadratu.

Część (2) jest trudniejsza – trzeba udowodnić, że jeśli wybrano więcej punktów, to nie spełniają one założeń zadania, czyli rozważyć wszystkie możliwe wybory większej liczby punktów. Jest ich na ogół bardzo dużo, a czasem – jak w tym zadaniu – nieskończenie wiele, więc nie da się przeanalizować ich wszystkich po kolei; do tego potrzebna jest metoda. Pokażę tutaj dwie, pierwsza z nich pozwala na dokończenie rozwiązania.

Metoda podziału polega na tym, że dzielimy obszar na kilka mniejszych, na których potrafimy oszacować liczbę obiektów. Kwadrat o boku 2 można podzielić na 9 kwadracików o boku $\frac{2}{3}$. Z nierówności $\frac{2}{3}\sqrt{2} < 1$ wynika, że na każdym kwadraciku można wybrać co najwyżej jeden punkt, a zatem ich liczba nie może przekroczyć 9.

Drugą jest **metoda miary**, którą zazwyczaj stosujemy wtedy, gdy obiekty, które umieszczamy, mają miarę, czyli na przykład pole lub objętość. Idea jest bardzo prosta: łączna miara umieszczanych obiektów, o ile są one parami rozłączne, nie może przekroczyć miary obszaru, na którym je umieszczamy.

Metody miary nie możemy bezpośrednio zastosować do powyższego zadania, ale da się to zrobić po jego lekkiej modyfikacji. Jeśli narysujemy koła otwarte o promieniu $\frac{1}{2}$, których środkami są wybrane punkty, to te koła są rozłączne, bo odległości między wybranymi punktami wynoszą co najmniej 1. Obszar, na którym te koła się znajdują, nie jest już kwadratem o boku 2, bo mogą one poza ten kwadrat wystawać. Jest to kwadrat o boku 2 obudowany czterema prostokątami o wymiarach $2 \times \frac{1}{2}$ i czterema ćwiartkami koła o promieniu $\frac{1}{2}$. Jego pole jest równe $8 + \frac{1}{4}\pi$, a pole pojedynczego koła to $\frac{1}{4}\pi$. Jeżeli zatem n jest liczbą umieszczonych punktów, to $\frac{1}{4}\pi \cdot n \leqslant 8 + \frac{1}{4}\pi$, co daje $n \leqslant 11$. W tym przypadku metoda nie dała pożądanego rezultatu, oszacowanie jest za słabe. No cóż... trzeba spróbować inaczej.

Zadania

1. Na szachownicy 8×8 należy umieścić największą możliwą liczbę figur szachowych danego rodzaju w taki sposób, by żadne dwie z nich się nie atakowały:
   (a) wieże; (b) gońce; (c) skoczki; (d) króle.
2. Jaką największą liczbę prostopadłościanów o wymiarach $2 \times 2 \times 1$ można zmieścić w sześciennym pudełku o krawędzi 3?
3. Czy w kwadracie o boku 5 można tak umieścić 6 punktów, by każde dwa z nich były oddalone co najmniej o 3?
4. Rozstrzygnąć, czy w sześciennym pudełku o krawędzi 4 można umieścić 65 kul o średnicy 1 (52 OM).
5. Na płaszczyźnie umieszczono 2017 punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest większa od 1. Wykazać, że odległość pomiędzy pewnymi dwoma spośród tych punktów jest większa od 35 (69 OM).
6. Wewnątrz koła o średnicy 1 chcemy narysować pewną liczbę okręgów o sumie średnic większej niż 1. Dodatkowym warunkiem jest istnienie takiej prostej ℓ, że każda prosta równoległa do ℓ jest sieczną co najwyżej jednego narysowanego okręgu. Czy to jest możliwe?

Wskazówki do zadań

1. We wszystkich podpunktach można zastosować metodę podziału.
(a) W każdej kolumnie mieści się najwyżej jedna wieża.
(b) Trzeba rozważyć 13 nietrywialnych, równoległych diagonali i jedną główną, prostopadłą do nich.
(c) Skoczek atakuje pola innego koloru niż to, na którym stoi. W prostokącie 2×4 mieszczą się najwyżej 4 skoczki.
(d) W kwadracie 2×2 mieści się najwyżej jeden król.

2. Wbrew pozorom metoda miary daje tu optymalne szacowanie.

3. Jest to możliwe. Należy powstrzymać odruch ustawiania pierwszych czterech punktów w narożnikach kwadratu.

4. $16 + 9 + 16 + 9 + 16 > 64$.

5. Wystarczy wykazać (dlaczego?), że te 2017 punktów nie zmieści się w kwadracie o boku 35. Można to zrobić, stosując metodę miary do modyfikacji tego zadania.

6. Zrzutować okręgi na średnicę prostopadłą do ℓ i zastosować metodę miary do otrzymanych odcinków. Wywnioskować stąd, że istnieje prosta równoległa do ℓ, która jest sieczną co najmniej dwóch narysowanych okręgów.