O tym, jak użyć królików doświadczalnych w matematyce

Oskar SKIBSKI

Podczas pisania tego artykułu nie ucierpiał żaden królik.

Twierdzenia w matematyce mogą być dowodzone na wiele sposobów. Niektórzy prześcigają się w znalezieniu dowodu najprostszego, a niektórzy starają się stworzyć dowód najbardziej elegancki. W tym artykule przedstawimy jedną z najmilszych, a na pewno najbardziej puszystych metod dowodzenia – użyjemy królików doświadczalnych.

Interpretacje kombinatoryczne – tak nazywa się metoda, której będziemy używać – polegają z grubsza na opowiadaniu bajek (wspomnieliśmy już o tym w Δ^4_{17}). Naszym celem jest opowiedzenie prostej historii, która opisuje (interpretuje) skomplikowane wyrażenie matematyczne. Opowiedzenie tej samej historii inaczej pozwala często na przedstawienie tego samego wyrażenia w inny, prostszy sposób. Zamiast tworzyć niepotrzebne definicje skupimy się jednak na przykładach – królikom na pewno bardziej się to spodoba.

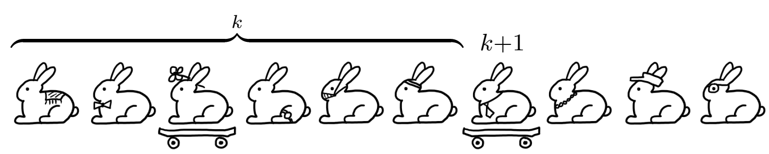
W paru zadaniach pojawią się współczynniki dwumianowe: dla dowolnych dwóch liczb naturalnych n i k, $\binom{n}{k}$ to liczba możliwych wyborów k spośród n królików. Zakładamy oczywiście, że króliki są rozróżnialne oraz – co przyda nam się później – że mają różną puszystość, wolną wolę, umieją jeździć na deskorolce i mówić, a także rozróżniają kolory.

Czytelnik może znać ten wzór z wartością $n(n+1)/2$ po prawej stronie. Nietrudno jednak zauważyć, że $\binom{n+1}{2}$ jest jej równe: dwa króliki spośród $n+1$ królików możemy wybrać, najpierw wskazując pierwszego królika (na $n+1$ sposobów), a potem drugiego (na n sposobów). W ten sposób dowolną parę królików, powiedzmy Stefana z Edwardem, wybierzemy dwa razy – raz wybierając pierwszego Stefana, a raz Edwarda. Dlatego wynik musimy podzielić przez 2.

Naszą analizę zaczniemy od prostych wzorów, które Czytelnik pewnie już widział, a może nawet i dowodził. Pierwszą formułą będzie suma liczb od 1 do n:

$$1 + 2 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}.$$

Aby udowodnić tę formułę, wyobraźmy sobie, że mamy $n+1$ królików, ale tylko dwie deskorolki. Musimy zatem wybrać, które dwa króliki je dostaną. Po prawej stronie równania mamy oczywiście liczbę takich wyborów. Ustawmy zatem nasze $n+1$ królików w rzędzie rosnąco według stopnia ich puszystości i zastanówmy się, jak możemy zinterpretować lewą stronę równania. Z dwóch królików, które dostaną deskorolki, jeden (mniej puszysty) będzie lewy, a drugi (bardziej puszysty) będzie prawy. Jeżeli prawym królikiem będzie ostatni królik w rzędzie, to będziemy mieli n opcji dopełnienia pary lewym królikiem. Z kolei jeżeli prawy królik będzie przedostatni w rzędzie, to będziemy mieli $n-1$ opcji. Aha! A zatem liczbę k w naszej sumie możemy interpretować jako liczbę takich wyborów królików, że prawy królik jest $k+1$ w rzędzie:



k = liczba wyborów 2 spośród $n+1$ królików, którym damy deskorolki, takich, że prawy królik jest na pozycji $k+1$.

Sumując po wszystkich możliwych k, czyli równoważnie po wszystkich możliwych pozycjach prawego królika, dostajemy wszystkie wybory dwóch królików.

Weźmy się zatem za trudniejsze wzory. Niech p będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnimy następujący wzór na sumę ciągu geometrycznego:

$$p^0 + p^1 + \cdots + p^n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}.$$

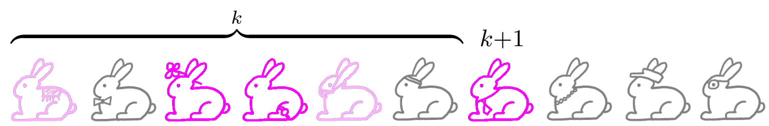
Zamieńmy najpierw dzielenie na mnożenie (co by nie mówić, akurat w mnożeniu króliki są bardzo dobre):

$$(p-1)\cdot p^0 + (p-1)\cdot p^1 + \cdots + (p-1)\cdot p^n = p^{n+1} - 1.$$

Wróćmy teraz szybko do naszych królików, zanim się rozbiegną. Wyobraźmy sobie, że mamy p różnokolorowych farb, którymi chcemy pomalować wszystkie króliki. Dla pierwszego królika mamy p możliwości, dla drugiego też p i tak dalej. W rezultacie dla $n+1$ królików dostajemy p^{n+1} możliwych kolorowań. Jeżeli odrzucimy teraz jedno konkretne kolorowanie, np. takie, w którym wszystkie króliki są szare, to dostaniemy $p^{n+1}-1$ kolorowań. Tak zinterpretujemy zatem prawą stronę równania.

Przejdźmy teraz do lewej strony. Tak jak poprzednio, spróbujmy iść od końca. Jeżeli ostatni królik nie będzie szary, to pozostałe mogą mieć dowolne kolory. Takich kolorowań jest $p-1$ (kolor dla ostatniego królika) razy p^n (dowolne kolory dla wcześniejszych królików). O, jest to zatem ostatni składnik naszej sumy. W ten sposób policzyliśmy wszystkie kolorowania, w których ostatni królik nie jest szary. Musimy jeszcze policzyć te, w których ostatni królik jest szary (ale któryś wcześniejszy szary nie jest). Rozpatrując kolor przedostatniego królika w takich kolorowaniach, dostajemy $p-1$ razy p^{n-1} kolorowań, w których ostatni królik jest szary, a przedostatni nie. Uogólniając, znowu udało nam się znaleźć regułę: składnik $(p-1)\cdot p^k$ odpowiada kolorowaniom, w których ostatni nieszary królik znajduje się na pozycji $k+1$:

Mogliśmy także bezpośrednio udowodnić wzór, w którym po prawej stronie jest $(p^{n+1}-1)/(p-1)$. Łatwo zobaczyć, że w $1/(p-1)$ kolorowań, które aktualnie zliczamy, ostatni nieszary królik jest fioletowy. Liczba $(p^{n+1}-1)/(p-1)$ to zatem liczba kolorowań $n+1$ królików p kolorami, w których ostatni nieszary królik istnieje i jest fioletowy. Liczba p^k to wtedy część tych kolorowań, w których ostatni nieszary królik jest na pozycji $k+1$.



$(p-1)\cdot p^k$ = *liczba kolorowań $n+1$ królików p kolorami, takich że ostatni nieszary królik jest na pozycji $k+1$.*

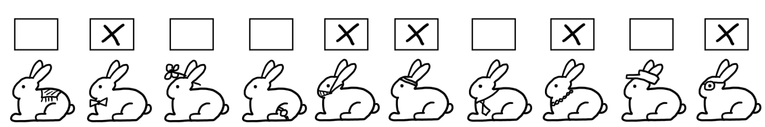
Sumując po wszystkich możliwych pozycjach ostatniego nieszarego królika, dostajemy wszystkie możliwe kolorowania, w których taki królik jest, a zatem prawą stronę.

Świetnie, idźmy więc dalej. Teraz rozpatrzmy następujący wzór na sumę współczynników dwumianowych:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Uwaga! Poniższy fragment zawiera drastyczne elementy! Delikatniejszy Czytelnik może przyjąć, że zamiast wybierać króliki do pasztetu robimy nabór ochotników do testów nowego szamponu do włosów.

Jak ten wzór zinterpretować? Wyobraźmy sobie, że chcemy zrobić pasztet. Mamy n królików, ale nie musimy brać ich wszystkich: może wystarczą nam 3 króliki, a jak będziemy gotowali dla wegetarian, to może nie weźmiemy żadnego. Dla ustalonej liczby k mamy $\binom{n}{k}$ możliwych wyborów k królików. A skoro tak, to liczba pasztetów, jakie możemy zrobić, odpowiada lewej stronie równania. Jak zinterpretować teraz prawą stronę? Wystarczy, że oddamy tę decyzję królikom (tak będzie dla nas łatwiej – w poprzednich przykładach zdążyliśmy się już z nimi zaprzyjaźnić). Podchodzimy kolejno do królików i pytamy: „Panie króliku, czy chce pan iść do pasztetu?" Każdy królik ma dwie możliwości, a zatem możemy uzyskać 2^n różnych zestawów odpowiedzi:



2^n = *liczba możliwych wyborów grupy królików spośród n królików, które pójdą do pasztetu.*

Skoro każdy taki ciąg odpowiada jednemu pasztetowi, to równość jest udowodniona.

Udowodniliśmy już parę prostych wzorów. Niektórzy mogliby jednak uznać to za przerost formy nad treścią – wszystkie trzy wzory można przecież dość łatwo udowodnić przez indukcję. Dotychczas znaliśmy jednak wynik. Pokażemy teraz, że króliki mogą nam pomóc ten wynik znaleźć.

Mieliśmy już sumę liczb naturalnych $k \in \{1, \ldots, n\}$, mieliśmy sumę potęg p^k, w końcu mieliśmy sumę współczynników $\binom{n}{k}$. A co będzie, jak połączymy te wszystkie sumy w jedno wyrażenie?

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot k = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot 0 + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot 1 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot n$$

Czy umiemy powiedzieć, jaki będzie wynik? Hmmm... jedno jest pewne – będziemy potrzebowali dłuższej historii.

Nie ma się jednak czego bać. Mówiliśmy już przecież, że $\binom{n}{k}$ to po prostu liczba wyborów k królików do pasztetu. Wyrażenie p^k to liczba sposobów, na jakie możemy te k wybranych królików pomalować p kolorami. Z kolei k to wybór jednego z nich, który dostanie deskorolkę. Liczymy zatem wszystkie kombinacje wyborów królików, ich kolorowań oraz opcji wręczenia jednej deskorolki.

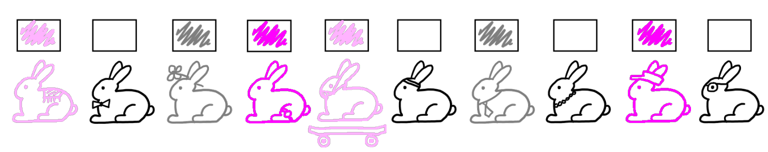
Bardziej formalnie nasze wyrażenie to liczba trójek (X, f, x), gdzie:
- $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$,
- $f : X \to \{1, \ldots, p\}$ oraz
- $x \in X$.

Tak jak w poprzednich przykładach, spróbujmy obliczyć naszą sumę w inny sposób. Zamiast najpierw wybierać i malować króliki, zaczniemy od wręczenia deskorolki. Mamy n królików, więc opcji wręczenia też jest n. Królik z deskorolką będzie w pasztecie – to już (niestety dla niego) ustaliliśmy. Nie wiemy natomiast, jakiego będzie koloru: tu dostajemy p możliwości. Wybór królika na deskorolce i jego koloru to zatem $n \cdot p$ opcji.

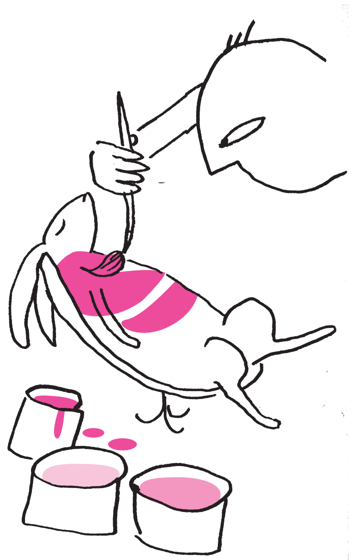
Weźmy się teraz za pozostałe króliki: musimy wybrać ich część i pomalować je na p kolorów. Spróbujmy znowu oddać tę decyzję w ręce królików. Podchodzimy do pierwszego królika i pytamy: „Panie króliku, czy chce pan iść do pasztetu?” Jeżeli powie, że tak, musimy go jeszcze pomalować. –„Panie króliku, którą farbę pan wybiera?” Wybrał. Zapisujemy decyzję: wybrany kolor lub jego brak, jeżeli królik nie chciał iść do pasztetu, i przechodzimy do kolejnego królika. Po wypytaniu wszystkich królików mamy listę, na której przy każdym z $n-1$ królików jest zapisana jedna z $p+1$ opcji. Łatwo zauważyć, że nasza lista jednoznacznie wyznacza, które króliki weźmiemy do pasztetu oraz jakie będą miały kolory. Wszystkie możliwe kombinacje uda nam się uzyskać, a zmiana na liście oznacza zmianę kombinacji. A zatem wszystkich możliwych kombinacji dla królików bez deskorolek jest $(p+1)^{n-1}$.

Łącząc obie części, dostajemy wynik:

$$\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot 0 + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot 1 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot n = n \cdot p \cdot (p+1)^{n-1}.$$



$n \cdot p \cdot (p+1)^{n-1}$ = *liczba możliwych kombinacji wyborów grupy spośród n królików do pasztetu, ich kolorowań p kolorami oraz opcji wręczenia jednej deskorolki.*



Nasza suma wyglądała groźnie, ale z królikami przy boku znowu udało nam się ją miło i przyjemnie wyznaczyć.

Jeżeli Czytelnikowi spodobały się powyższe interpretacje kombinatoryczne, może spróbować samodzielnie udowodnić w podobny sposób poniższe wzory:

- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$,
- $\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$,
- $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$,
- $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$,
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$,
- $\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{l} = 3^n$.

Na koniec warto dodać, że nie musimy koniecznie używać królików. Równie dobrze sprawdzą się koty, ryjówki albo dziki. W interpretacjach kombinatorycznych ogranicza nas tylko nasza wyobraźnia.