Klub 44 F

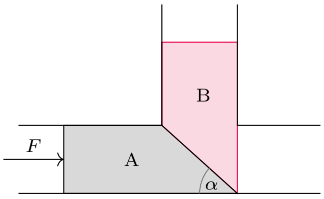
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2021

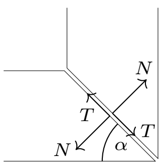
Przypominamy treść zadań:

716. Sztabka A może poruszać się w prowadnicy poziomej, a sztabka B w prowadnicy pionowej (rys. 1). Ścianki prowadnic są idealnie gładkie. Płaszczyzna styku sztabek nachylona jest do poziomu pod kątem α, a współczynnik tarcia między sztabkami wynosi μ. Jaką poziomą siłę należy przyłożyć do sztabki A, aby wprawić ją w ruch? Masa sztabki B jest równa m.

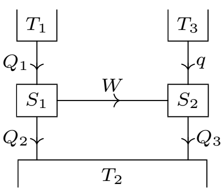
717. Do ogrzewania budynku wykorzystywane jest ciepło oddawane przez pracujący silnik cieplny. Silnik ten napędza chłodziarkę, która pobiera ciepło od wód gruntowych i również ogrzewa wodę w kaloryferach. Jaka jest maksymalna sprawność takiego cyklu ogrzewczego, jeżeli temperatura w kotle silnika cieplnego wynosi $t_1 = 210°\mathrm{C}$, temperatura wody w kaloryferach równa jest $t_2 = 60°\mathrm{C}$, a wody gruntowe mają temperaturę $t_3 = 10°\mathrm{C}$?



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

716. Na rysunku 2 przedstawione są siły oddziaływania między sztabkami. Warunek równowagi sił działających na sztabkę B w kierunku pionowym ma postać

$$N\cos\alpha - T\sin\alpha = mg.$$

Siły działające na sztabkę A w kierunku poziomym w stanie równowagi spełniają równanie

$$F = T\cos\alpha + N\sin\alpha.$$

Dopóki sztabki pozostają w spoczynku, T jest tarciem statycznym i spełniony jest warunek $T \leqslant \mu N$. W przypadku granicznym

$$N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = mg \text{ oraz } F = N(\mu\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Sztabki zaczną się przesuwać, gdy

$$F > mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)/(\cos\alpha - \mu\sin\alpha),$$

a współczynnik tarcia $\mu < 1/\mathrm{tg}\,\alpha$.

717. Schemat działania układu przedstawia rysunek 3. Silnik S_1 pobiera z kotła ciepło Q_1 uzyskane w wyniku spalania paliwa, oddaje ciepło Q_2 do układu ogrzewczego i wykonuje pracę $W = Q_1 - Q_2$. Zakładamy, że silnik ten ma maksymalną możliwą sprawność $\eta_1 = (T_1 - T_2)/T_1 = W/Q_1$. Stąd

$$W = Q_1(T_1 - T_2)/T_1 \text{ oraz } Q_2 = Q_1T_2/T_1.$$

Cykl pracy chłodziarki S_2 jest cyklem odwrotnym. Pobiera ona ciepło q od wód gruntowych i przekazuje układowi ogrzewczemu ciepło $Q_3 = W + q$. Ponieważ znowu zakładamy, że jest to maszyna idealna, zachodzą związki $\eta_2 = W/Q_3 = (T_2 - T_3)/T_2$. Stąd

$$Q_3 = WT_2/(T_2 - T_1) = Q_1(T_1 - T_2)T_2/T_1(T_2 - T_3).$$

Ciepło zużyte na ogrzewanie budynku wynosi

$$Q = Q_2 + Q_3 = Q_1T_2(T_1 - T_3)/T_1(T_2 - T_3).$$

Uwzględniając, że $T_1 = 483$ K, $T_2 = 333$ K, $T_3 = 283$ K, otrzymujemy sprawność układu

$$\eta = Q/Q_1 \cong 2.$$

Fakt, że sprawność ta jest większa od 1, nie przeczy prawom termodynamiki, ponieważ pobierane jest tu ciepło z ubocznego źródła – wód gruntowych.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 710 ($WT = 2{,}33$), 711 ($WT = 2{,}55$) z numeru 1/2021

Michał Koźlik	Gliwice	4 – 42,82
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Piotr Adamczyk	Warszawa	37,77
Konrad Kapcia	Poznań	1 – 36,18
Paweł Perkowski	Ożarów	3 – 35,32
Sławomir Buć	Mystków	31,94

Klub 44 M

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2021

Przypominamy treść zadań:

819. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkącików o boku 1. Rozważamy ciągi kolejno przyległych trójkącików, z których żaden nie powtarza się (trójkąciki przyległe mają wspólny bok).

(**a**) Wyznaczyć największą możliwą liczbę trójkącików w takim ciągu.

(**b**) Czy i jak zmieni się wynik, jeśli dodatkowo zażądamy, by ostatni trójkącik przylegał do pierwszego?

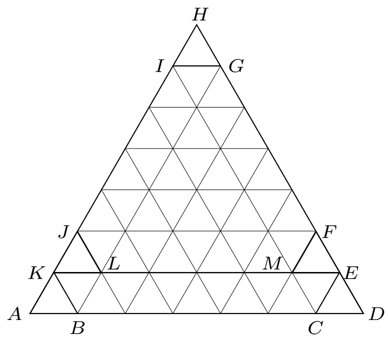
820. Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich a, b, c:

$$\frac{a^2}{b^2+bc} + \frac{b^2}{c^2+ca} + \frac{c^2}{a^2+ab} \geqslant \frac{3}{2}.$$

819. Malujemy pola planszy (trójkąciki jednostkowe) dwoma kolorami w „szachownicę": trójkąciki podobne do dużego trójkąta w jednokładności prostej – to pola białe; w odwrotnej – czarne. Pola narożne (tj. mające wspólny wierzchołek z dużym trójkątem) są białe. Pola przyległe mają różne kolory. W ciągu długości d (kolejno przyległych pól) jest co najmniej $\lfloor d/2 \rfloor$ pól czarnych. Łączna liczba pól czarnych wynosi $(n^2 - n)/2$ (nietrudne sprawdzenie). Zatem $d \leqslant n^2 - n + 1$. Gdy ponadto taki ciąg zamyka się w cykl, jego długość jest liczbą parzystą, więc nie przekracza $n^2 - n$.

Te wartości są osiągalne. Udowodnimy indukcyjnie takie stwierdzenie:

> W trójkącie o boku n istnieje cykl złożony z $n^2 - n$ pól oraz istnieje ciąg długości $n^2 - n + 1$, mający początek i koniec w dwóch polach narożnych, dowolnie wybranych.



Łatwo sprawdzamy, że dla $n = 2$ tak jest (dla $n = 1$ zadanie nie ma wiele sensu). Ustalmy liczbę naturalną $n \geqslant 3$ i przyjmijmy słuszność stwierdzenia dla $n - 1$. Weźmy trójkąt ADH o boku n; na jego obwodzie zaznaczmy kolejno punkty A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, zaś wewnątrz – punkty L, M tak, by trójkąciki ABK, CDE, GHI były polami narożnymi trójkąta ADH, zaś trójkąciki KLJ, MEF – polami narożnymi trójkąta KEH, o boku $n - 1$. W nim (z założenia) istnieje ciąg długości $(n-1)^2 - (n-1) + 1$, czyli $n^2 - 3n + 3$, łączący pola KLJ i MEF. Polami trapezu $CEKB$ (w liczbie $2n - 3$) dopełniamy go do cyklu długości $n^2 - n$.

W trójkącie KEH istnieje też (z założenia) ciąg długości $n^2 - 3n + 3$, biegnący od pola GHI do MEF. Dołączamy do niego pola równoległoboku $CEKA$, od CEM do KAB (jest ich $2n - 2$). Dostajemy ciąg długości $n^2 - n + 1$, łączący pola narożne GHI, ABK. Przez obrót o $120°$ można dostać początek i koniec w dowolnie wybranych narożnikach.

Uzyskaliśmy obie części tezy indukcyjnej. Z udowodnionego stwierdzenia wynikają odpowiedzi dla obu części zadania: (**a**) $n^2 - n + 1$; (**b**) $n^2 - n$.

820. Ponieważ $2bc \leqslant b^2 + c^2$, zatem

$$\frac{a^2}{b^2 + bc} \geqslant \frac{a^2}{b^2 + \frac{1}{2}(b^2 + c^2)} = \frac{2a^2}{3b^2 + c^2}.$$

Podobnie szacujemy z dołu dwa pozostałe składniki podanego wyrażenia. Wystarczy wobec tego pokazać, że

$$(1) \qquad \frac{a^2}{3b^2 + c^2} + \frac{b^2}{3c^2 + a^2} + \frac{c^2}{3a^2 + b^2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Oznaczmy: $3b^2 + c^2 = u$, $3c^2 + a^2 = v$, $3a^2 + b^2 = w$. Ten układ trzech równań z niewiadomymi a^2, b^2, c^2 ma jedyne rozwiązanie:

$$(2) \qquad a^2 = \frac{9w - 3u + v}{28}, \quad b^2 = \frac{9u - 3v + w}{28}, \quad c^2 = \frac{9v - 3w + u}{28}.$$

Lewa strona dowodzonej nierówności (1) przybiera po wprowadzeniu wartości (2) postać

$$L\colon \; = \frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} = \frac{1}{28}\left(\frac{9w}{u} - 3 + \frac{v}{u} + \frac{9u}{v} - 3 + \frac{w}{v} + \frac{9v}{w} - 3 + \frac{u}{w}\right) =$$

$$= \frac{9}{28}\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{w} + \frac{w}{u}\right) - \frac{9}{28} + \frac{1}{28}\left(\frac{v}{u} + \frac{w}{v} + \frac{u}{w}\right).$$

W ostatnim uzyskanym wyrażeniu sumy w nawiasach są nie mniejsze niż 3 (nierówność między średnimi). Teza (1) wynika stąd natychmiast:

$$L \geqslant \frac{9}{28} \cdot 3 - \frac{9}{28} + \frac{1}{28} \cdot 3 = \frac{3}{4}.$$

(Witold Bednarek, autor zadania, przedstawił ten ładny dowód).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 813 ($WT = 2{,}95$) i 814 ($WT = 1{,}02$) z numeru 1/2021

Jerzy Cisło	Wrocław	43,40
Paweł Burdzy	Warszawa	43,18
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Mikołaj Pater	Opole	40,11
Michał Adamaszek	Kopenhaga	35,88
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74
Witold Bednarek	Łódź	33,04
Marcin Kasperski	Warszawa	32,68
Kacper Morawski	Warszawa	32,13

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.