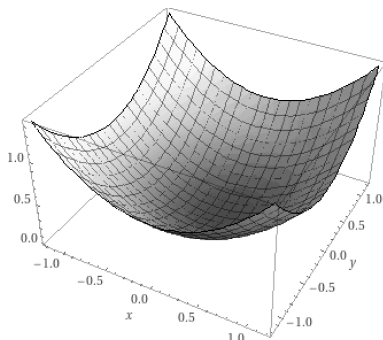
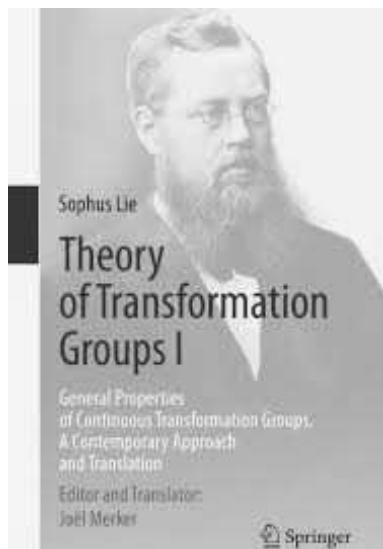


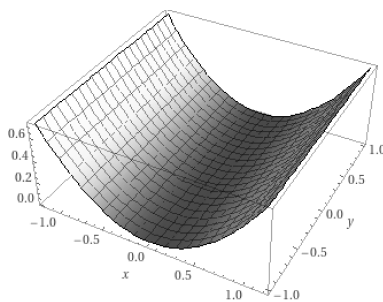
## Równania różniczkowe i geometria (II)

Grzegorz ŁUKASZEWICZ\*, Piotr KRZYŻANOWSKI\*

\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Powierzchnia równania  
 $y'(x) = x^2 + y^2$



Powierzchnia równania  
 $y'(x) = x$

W ogólności, równanie różniczkowe może mieć bardzo dużo grup symetrii. Na przykład łatwo to zauważyć w przypadku równania  $y'(x) = 0$ .

Norwegia, mały i przez długi czas bardzo ubogi kraj na obrzeżach Europy, dała światu wiele; między innymi dwie matematyczne gwiazdy pierwszej wielkości: Nielsa Henrika Abela (1802–1829) i Sophusa Liego (1842–1899). Obaj uczeni dokonali odkryć przełomowych, coraz bardziej obecnych we współczesnej matematyce i fizyce. Nie ma tu miejsca na szersze omówienie, odsyłamy do bibliografii [Cantwell], wspomnijmy tylko, że Sophus Lie uczęszczał na wykłady Ludwiga Sylowa (1863) poświęcone teorii Galois, a później, w 1870 roku, w rezultacie współpracy z Feliksem Kleinem wpadł na pomysł, że jest możliwe stworzenie dla równań różniczkowych analogii do teorii Galois dla równań algebraicznych. Jego prace miały bardzo silne podłoże geometryczne.

Z konieczności możemy tu przedstawić tylko skrawek teorii grup symetrii Liego – i to w wielkim skrócie. Chodzi nam głównie o przybliżenie pewnych pomysłów, bez wchodzenia w szczegóły.

Niech  $S$  będzie wykresem funkcji  $f(x, y)$ , czyli powierzchnią zadaną w przestrzeni trójwymiarowej  $(x, y, z)$  równaniem  $z = f(x, y)$ .

Założmy, że funkcja  $y = y(x)$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$(1) \quad y'(x) = f(x, y),$$

w pewnym obszarze  $D$  płaszczyzny  $(x, y)$ . Trajektoria  $\phi$  rozwiązania  $y = y(x)$  na płaszczyźnie  $(x, y)$  ma swój odpowiednik na powierzchni  $S$ , jest to krzywa  $\Phi: x \mapsto (x, y(x), y'(x)) = (x, y(x), f(x, y(x)))$ . Powierzchnię  $S$  nazywamy *powierzchnią równania różniczkowego* (1).

Założmy, że przez każdy punkt rozważanego obszaru  $D$  (możemy przyjąć dla uproszczenia, że jest to cała płaszczyzna) przechodzi dokładnie jedna trajektoria rozwiązania równania (1). Podobnie jak płaszczyzna  $(x, y)$  jest utkana z trajektorii rozwiązań równania (1), powierzchnia  $S$  jest utkana z leżących na niej obrazów tych ostatnich.

Najprostszym i bardzo ważnym przykładem jest sytuacja, gdy funkcja  $f$  zależy tylko od zmiennej  $x$ :

$$(2) \quad y'(x) = f(x).$$

W tym wypadku powierzchnia  $S$  jest utkana nie tylko z rodziny krzywych  $\Phi$ , ale także z rodziny prostych równoległych do osi  $OY$ .

Jeśli trajektorię  $\phi_1$  rozwiązania równania (2) przesuniemy w kierunku osi  $OY$  o pewien wektor, to otrzymamy także pewną trajektorię, oznaczmy ją przez  $\phi_2$ , rozwiązaniem tego równania, a obraz  $\Phi_1$  na powierzchni  $S$  trajektorii  $\phi_1$  przesunie się analogicznie na obraz  $\Phi_2$  trajektorii  $\phi_2$ , leżący także na powierzchni  $S$ .

Odpowiednikiem analitycznym powyższej ważnej uwagi jest stwierdzenie, że zmiana zmiennych

$$(3) \quad \hat{x}(x, y, \epsilon) = x, \quad \hat{y}(x, y, \epsilon) = y + \epsilon,$$

gdzie  $\epsilon$  jest dowolną liczbą rzeczywistą, przeprowadza rozwiązanie  $y = y(x)$  na rozwiązanie  $\hat{y} = \hat{y}(\hat{x})$ , tzn.

$$(4) \quad \text{jeśli } y'(x) = f(x), \quad \text{to } \hat{y}'(\hat{x}) = f(\hat{x}).$$

Doszliliśmy do fundamentalnych pojęć. Przekształcenia współrzędnych (3) tworzą jednoparametrową grupę (dla  $\epsilon = 0$  mamy przekształcenie identycznościowe, dla każdego przekształcenia istnieje przekształcenie odwrotne, przekształcenia można składać, składanie jest łączne), zwaną *grupą symetrii równania różniczkowego* (2). Samo równanie różniczkowe nie zmienia się przy przekształceniach współrzędnych swoich grup symetrii. Mówimy o *niezmienniczości równania* ze względu na te przekształcenia.

Zauważmy, że równanie różniczkowe postaci (2) można scałkować bezpośrednio, przykładając operator całki do obu stron, co daje

$$(5) \quad y(x) = \int f(x) dx.$$

Tej ważnej własności nie mają równania postaci (1). Aby móc je scałkować, czyli znaleźć ich rozwiązania, możemy skorzystać z następującego pomysłu.

Dla danego równania różniczkowego  $y'(x) = f(x, y)$  znajdujemy najpierw transformację zmiennych  $(r, s) = (r(x, y), s(x, y))$  taką, że w nowych zmiennych równanie ma postać  $s'(r) = g(r)$ . Następnie całkujemy bezpośrednio otrzymane równanie, a na koniec przedstawiamy otrzymane rozwiązania w zmiennych  $(x, y)$ . Otrzymane w ten sposób funkcje są rozwiązaniami równania  $y'(x) = f(x, y)$ .

Ten pomysł jest prosty (nawet genialny) i ma znamiona metody ogólnej. Jego realizacja jednak nie jest prosta. Chcielibyśmy mieć bowiem ogólny algorytm, czy metodę, znalezienia właściwej transformacji współrzędnych z  $(x, y)$  na  $(r, s)$ . Tu właśnie przychodzi z pomocą teoria grup symetrii równań różniczkowych. Okazuje się, że znalezienie grupy symetrii danego równania różniczkowego może być prostsze od znalezienia rozwiązania samego równania.

Załóżmy zatem, że znamy pewną grupę symetrii danego równania postaci (1). Szukamy takiej zamiany zmiennych z  $(x, y)$  na  $(r, s)$ , że trajektorie wspomnianej grupy równania (1) przechodzą na trajektorie grupy translacji

$$(\hat{r}, \hat{s}) = (\hat{r}(r, s, \epsilon), \hat{s}(r, s, \epsilon)) = (r, s + \epsilon).$$

Wtedy samo równanie (1) transformuje się do równania postaci  $s'(r) = g(r)$ , które już umiemy scałkować. Zadanie uprościło się więc do znalezienia odwzorowania prostującego krzywe danej rodziny.

Zobaczmy, jak to wygląda na przykładzie:

### Równanie Riccatiego

Rozważmy równanie postaci  $dy/dx = a(x)y^2 - b(x)y - c(x)$ , nazywane równaniem Riccatiego. Nie znamy sposobu rozwiązania tego równania w tak ogólnej postaci. Niemniej w niektórych szczególnych przypadkach można sobie z nim poradzić. Weźmy na warsztat następujący konkretny przypadek:

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad (x \neq 0),$$

i spróbujmy znaleźć jego *rozwiązanie ogólne*, czyli rodzinę krzywych, do których styczne w każdym punkcie danej krzywej wyrażają się powyższym równaniem.

### Wskażmy wygodną grupę symetrii!

Nie bardzo wiadomo, jak się zabrać za to równanie... wykorzystamy więc pomysł przedstawiony powyżej. Aby znaleźć grupę symetrii równania, możemy skorzystać z ogólnego algorytmu, ale pójdziemy na skróty. Struktura równania podpowiada, żeby spróbować transformacji skalowania  $(x, y) \mapsto (ax, by)$  z pewnymi stałymi  $a$  i  $b$ . I rzeczywiście, łatwo sprawdzić, że równanie jest niezmiennicze ze względu na tę transformację, o ile stałe spełniają  $b = a^{-2}$ , a więc ze względu na całą grupę transformacji

$$(7) \quad (\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y, \epsilon), \hat{y}(x, y, \epsilon)) = (e^\epsilon x, e^{-2\epsilon} y).$$

W zmiennych (7) równanie (6) wygląda zatem tak samo:

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \hat{x}\hat{y}^2 - \frac{2\hat{y}}{\hat{x}} - \frac{1}{\hat{x}^3}, \quad (\hat{x} \neq 0).$$

Szukamy teraz zmiennych  $(r, s)$ , w których trajektorie (7) będą prostymi postaci

$$(8) \quad (\hat{r}, \hat{s}) = (\hat{r}(r, s, \epsilon), \hat{s}(r, s, \epsilon)) = (r, s + \epsilon).$$

Po uważnym przyjrzeniu się zależnościom (7) i (8) znajdujemy, że zmienne

$$(9) \quad (r, s) = (x^2 y, \ln|x|)$$

spełniają ten warunek, czyli są *zmiennymi kanonicznymi*. W tych nowych zmiennych nasze równanie różniczkowe przyjmuje postać

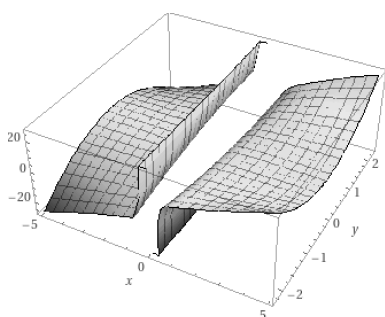
$$(10) \quad \frac{ds}{dr} = \frac{1}{r^2 - 1}.$$

Rzeczywiście, z (9) i (6) mamy

$$dr = 2xydx + x^2 dy = 2xydx + x^2 \left( xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \left( x^3 y^2 - \frac{1}{x} \right) dx$$

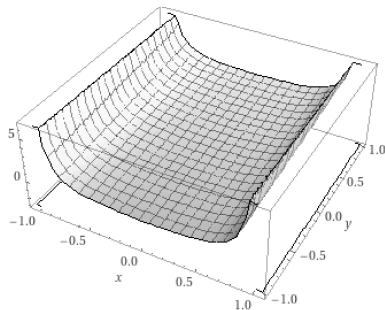


Jacopo Francesco Riccati (1676–1754)



Powierzchnia równania Riccatiego

Różniczka funkcji  $z = f(x, y)$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  to wyrażenie  $dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$ , w języku geometrii: równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji  $z = f(x, y)$  w punkcie  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  (podstawiamy  $dx = x - x_0, dy = y - y_0, dz = z - z_0$ ).



Powierzchnia równania Riccatiego w zmiennych kanonicznych

oraz

$$ds = \frac{1}{|x|} dx,$$

i korzystając z (9), dostajemy (10). To ostatnie równanie łatwo scałkować, otrzymując

$$s(r) = \ln \left| \sqrt{c \frac{r-1}{r+1}} \right|.$$

Powrót do zmiennych  $(x, y)$  daje rozwiązanie ogólne

$$(11) \quad y = \frac{c + x^2}{x^2(c - x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2 + c}$$

naszego równania (6). A o to nam właśnie chodziło.

### A jak by to zrobił komputerowy pakiet obliczeń symbolicznych?

Krytyczny Czytelnik zdążył już zapewne zauważyć, że kluczowym momentem była chwila olśnienia, dzięki której zgadliśmy, jaka jest właściwa transformacja  $(\hat{x}, \hat{y})$ , co pozwoliło nam (po ukrytych przed Czytelnikiem Niecierpliwym rachunkach) wygenerować nowy układ zmiennych  $(r, s)$  i dojść do końcowego prościutkiego równania (10). A Pedantyczny Czytelnik dostrzegł na dodatek, że do uzyskania finalnego wzoru (11) także należało wykazać się jakąś, choć nie przesadną, sprawnością rachunkową.

Pakiety obliczeń symbolicznych, takie jak komercyjny Maple czy darmowe SymPy lub Maxima, w miejsce błyskotliwych olśnień stosują podejście pilnego czytelnika podręczników rozwiązywania równań różniczkowych. Po wstępnych uproszczeniach *klasyfikują* równanie, sprawdzając, czy może jest postaci, dla której pewna mechaniczna metoda sprowadzenia zadania do obliczenia całek może mieć szanse powodzenia (np. czy jest to równanie o zmiennych rozdzielonych). Oczywiście równanie może dać się sklasyfikować na kilka sposobów.

Zobaczmy, jak to działa w module obliczeń symbolicznych dla Pythona, czyli SymPy. Zdefiniujemy w nim nasze równanie Riccatiego (6), a potem poprosimy o sklasyfikowanie, a na koniec rozwiązanie tego równania:

```
from sympy import *
from sympy.abc import x
y = Function('y')(x)
deq = Eq( y.diff(x), x*y**2 - 2*y/x - 1/x**3 )
typ = classify_ode(deq, y)
sol = dsolve(deq, y)
```

Po klasyfikacji równania program podejmuje próby rozwiązania kolejnymi algorytmami właściwymi dla danego typu, aż do skutku. Okazuje się, że według SymPy nasze równanie można *spróbować* rozwiązywać przez sprowadzenie do równania o zmiennych rozdzielonych (ewentualnie bez obliczania finałowych całek, jeśli okażą się za trudne) lub metodą grup Liego.

No i już pierwsza z brzegu metoda, czyli próba sprowadzenia do równania postaci  $y' = F(x^n y) \cdot (y/x)$  – które potem sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych, a to z kolei do zwykłego całkowania – daje błyskawiczny i zachwycający wynik:

$$y(x) = \frac{-(C_1 x^2 + 1)}{x^2(C_1 x^2 - 1)}.$$

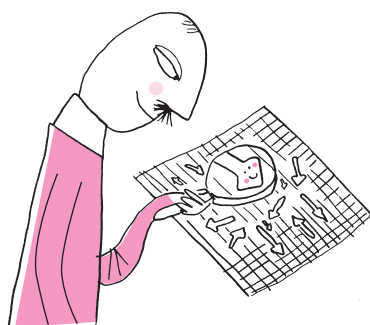
Po przekształceniu pokrywa się on z uzyskanym przez nas rozwiązaniem (11).

Możemy też zażądać, by SymPy rozwiązał nasze równanie przez grupy Liego. Wtedy algorytm będzie tyleż cierpliwie, co bezrefleksyjnie, próbował skorzystać z kolejnych heurystyk opisanych w pracy [Cheb-Terrab et al.] – w naszym przypadku dopiero czwarta próba zakończy się sukcesem. Nowy układ współrzędnych, do jakiego dochodzi SymPy, zupełnie nie przypomina (9):

$$(r, s) = \left( y - \frac{1}{x^2}, \frac{x^2}{2} \right),$$

lecz za to równanie przyjmuje w nim jeszcze prostszą(!) postać:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{r^2}.$$



A potem już z górki: *reszta jest liczeniem* – jak mawia Marcin Kuczma, parafrazując ostatnie słowa Hamleta – ale i tak cieszymy się, że kończące sprawę całkowanie, podstawienie, uproszczenie i rozwikłanie wykonał za nas automat.

Można by zapytać, dlaczego nie uczono nas na studiach metod opartych na grupach symetrii jako „uniwersalnego” przepisu na spreparowanie rozwiązań większości zadań rachunkowych z równań różniczkowych zwyczajnych. Jednym z powodów jest to, że te metody, nawet po przyjęciu upraszczających założeń co do postaci poszukiwanych obiektów, wymagają przeprowadzenia żmudnych i nudnych rachunków. Choć, z drugiej strony, znajomość symetrii równania to dużo więcej niż tylko znajomość jego rozwiązania, zob. [Cantwell, str. 291–293].

Teraz systemy obliczeń symbolicznych są powszechnie dostępne i potrafią rozwiązać większość zadań typu „wyznacz rozwiązanie ogólne równania różniczkowego” – choć czasem trzeba wypróbować kilka programów. Co znamienne, już w artykule [Cheb-Terrab et al.] sprzed prawie 20 lat, opisano program komputerowy wykorzystujący techniki grup symetrii Liego i kilka sprytnych heurystyk, który (testowany na 552 przykładach z budzącej strach wśród studentów klasycznej książki Kamkego) miał skuteczność 78% – a to zasługiwałoby na solidną czwórkę!

Literatura:

Cantwell, B.J. *Introduction to Symmetry Analysis*. Cambridge University Press, 2002.

Cheb-Terrab, E.S., and Kolokolnikov, T. *First-order ordinary differential equations, symmetries and linear transformations*. European Journal of Applied Mathematics. Vol. 14, 2003.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1678.** W turnieju szachowym każdy uczestnik grał z każdym dokładnie jeden raz. W każdej rundzie każdy uczestnik zagrał jedną partię. W co najmniej połowie wszystkich partii obaj uczestnicy pochodzili z tego samego miasta. Udowodnij, że w każdej rundzie doszło do przynajmniej jednej rozgrywki, w której spotkały się osoby z tego samego miasta.

Rozwiązanie na str. 18

**M 1679.** Czy istnieje 19-kąt wpisany w okrąg, którego wszystkie boki są różne, a miary kątów wewnętrznych (wyrażone w stopniach) są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie na str. 3

**M 1680.** Rozwiązać układ równań

$$\frac{3x - y}{x - 3y} = x^2, \quad \frac{3y - z}{y - 3z} = y^2, \quad \frac{3z - x}{z - 3x} = z^2$$

w liczbach rzeczywistych  $x, y, z$ .

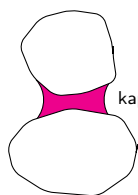
Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1027.** Budowę zamku z piasku często przerywają „katastrofy budowlane” polegające na pęknięciu i obsunięciu się górnej części budowanej wieży wzdłuż płaszczyzny nachylonej do poziomu pod pewnym kątem  $\alpha > \pi/4$ . Piasek użyty do budowy wieży musi być mokry. Suchy piasek obsypuje się, przybierając kształt stożka o tworzącej nachylonej do poziomu pod kątem  $\phi$ , przy czym  $\text{tg } \phi \approx \mu$ , gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia między ziarnami piasku. Piasek nie może też być zbyt mokry, bo wtedy ma konsystencję (płynnego) błota. Budowa zamków jest możliwa, gdy wody jest dokładnie tyle, żeby zwilżała ziarna piasku, tworząc zlepiające je „mostki” (rysunek). Ile wynosi kąt  $\alpha$ ?

Dla suchego piasku o jednakowych (w przybliżeniu), kulistych ziarnach  $\phi \approx 30^\circ$ .

Rozwiązanie na str. 19



kapilarny mostek

**F 1028.** Naładowane cząstki poruszające się w przestrzeni kosmicznej osiągną ogromne energie kinetyczne. Jako jeden z możliwych mechanizmów „rozpędzania” takich cząstek Enrico Fermi wskazał przelot cząstki przez obszar pola magnetycznego – np. wewnątrz międzygwiazdowych obłoków zjonizowanego gazu. Wiemy jednak, że oddziaływanie z polem magnetycznym nie zmienia energii kinetycznej naładowanej cząstki. Czy więc proponowany mechanizm „przyspieszania” cząstek jest realistyczny?

Rozwiązanie na str. 17