Klub 44 M

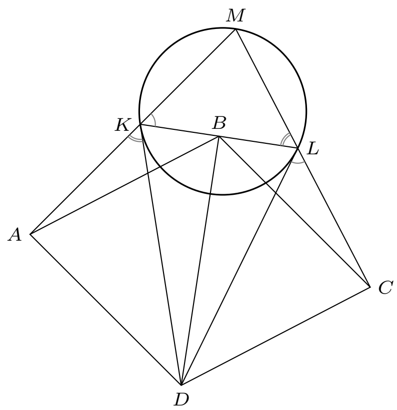
Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2021

Przypominamy treść zadań:

817. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątami ostrymi przy wierzchołkach A, C. Punkty K, L (w jego płaszczyźnie) są wyznaczone przez warunki prostopadłości $DA \perp AK$, $DB \perp BK$, $DB \perp BL$, $DC \perp CL$. Proste AK i CL przecinają się w punkcie M. Dowieść, że proste styczne w punktach K, L do okręgu opisanego na trójkącie KLM przecinają się w punkcie D.

818. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 9$ istnieje taka liczba naturalna $m \leqslant n/3$, że różnica $2^n - 2^m$ jest podzielna przez n.



817. Należy pokazać, że proste KD, LD są styczne do okręgu (KLM). Zgodnie z twierdzeniem o stycznej i cięciwie, jest to równoważne równości kątów:

$$\sphericalangle MKL = \sphericalangle CLD, \qquad \sphericalangle MLK = \sphericalangle AKD. \tag{1}$$

Czworokąty $ADBK$ oraz $CDBL$ mają kąty proste przy wierzchołkach A, B oraz B, C; każdy z nich ma więc okrąg opisany. Wobec tego

$$\sphericalangle MKL = \sphericalangle ADB, \qquad \sphericalangle ABD = \sphericalangle AKD,$$
$$\sphericalangle MLK = \sphericalangle CDB, \qquad \sphericalangle CBD = \sphericalangle CLD.$$

Do uzyskania związków (1) wystarczy mieć równości

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD, \qquad \sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD$$

– a one są oczywiste, bo to pary kątów naprzemianległych w równoległoboku $ABCD$.

818. Wykażemy najpierw tezę zadania dla liczb nieparzystych $n \geqslant 3$ (założenie $n \geqslant 9$ nie będzie chwilowo potrzebne). Wystarczy znaleźć liczbę naturalną ℓ spełniającą warunki

$$2^\ell \equiv 1 \pmod{n} \quad \text{oraz} \quad \tfrac{2}{3}n \leqslant \ell < n; \tag{2}$$

wówczas bowiem liczba $m = n - \ell$ czyni zadość wymaganiom: $0 < m \leqslant \frac{1}{3}n$; $2^n = 2^m 2^\ell \equiv 2^m \pmod{n}$.

Użyjemy funkcji Eulera φ, określonej (na przykład) wzorem

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \frac{p-1}{p} \tag{3}$$

(iloczyn po wszystkich dzielnikach pierwszych p liczby n); widać z tego wzoru, że $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą dla $n \geqslant 3$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 811 ($WT = 2{,}44$) i 812 ($WT = 1{,}60$) z numeru 12/2020

Marcin Małogrosz	Warszawa	45,69
Paweł Burdzy	Warszawa	43,18
Jerzy Cisło	Wrocław	42,38
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Mikołaj Pater	Opole	36,14
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74
Marcin Kasperski	Warszawa	32,68
Kacper Morawski	Warszawa	32,13

Pan Marcin Małogrosz przekracza próg 44p. już po raz czwarty.

Skoro n jest liczbą nieparzystą, podstawowa własność funkcji φ (*twierdzenie Eulera*) zapewnia, że $2^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Jeśli więc $\varphi(n) \geqslant \frac{2}{3}n$, to biorąc we wzorze (2) $\ell = \varphi(n)$, mamy to, o co chodzi. Taka sytuacja zawsze ma miejsce, gdy n jest potęgą liczby pierwszej: $n = q^j$; bo wtedy (wzór (3)): $\varphi(n) = n \cdot \frac{q-1}{q} \geqslant \frac{2}{3}n$.

Zbadania wymaga sytuacja, gdy $\varphi(n) < \frac{2}{3}n$; zatem liczba n nie jest potęgą liczby pierwszej i daje się przedstawić jako iloczyn czynników (nieparzystych) $a, b \geqslant 3$, względnie pierwszych. Wówczas $\varphi(n) = \varphi(a)\varphi(b)$ (znana własność funkcji Eulera). W myśl wcześniejszej uwagi, wartości φ dla argumentów a, b są parzyste: $\varphi(a) = 2\alpha$, $\varphi(b) = 2\beta$; tak więc $\varphi(n) = 4\alpha\beta$. Przy tym (znów na mocy twierdzenia Eulera):

$$2^{2\alpha} \equiv 1 \pmod{a}, \qquad 2^{2\beta} \equiv 1 \pmod{b},$$

skąd (przez podniesienie do potęg β, α): $2^{2\alpha\beta} \equiv 1$ zarówno $\pmod{a}$, jak i $\pmod{b}$. A ponieważ $n = ab$ (a, b względnie pierwsze), wynika stąd, że

$$2^{2\alpha\beta} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Skoro $\varphi(n) < \frac{2}{3}n$, liczba $2\alpha\beta = \frac{1}{2}\varphi(n)$ jest mniejsza niż $\frac{1}{3}n$, więc pewna jej wielokrotność (oznaczmy ją ℓ) wpada do przedziału $[\frac{2}{3}n, n)$; zatem spełnia wymagany warunek (2). Mamy tezę dla n nieparzystych, $n \geqslant 3$.

Niech teraz $n > 8$ będzie liczbą parzystą – ale nie potęgą dwójki: $n = 2^j c$; $c \geqslant 3$ nieparzyste; $j \geqslant 1$. Na mocy wykazanej części zadania istnieje liczba naturalna $b \leqslant \frac{1}{3}c$, dla której $2^b \equiv 2^c \pmod{c}$. Niech $m = 2^j b$; zatem $2^m \equiv 2^n \pmod{c}$. Ponadto $m \geqslant 2^j > j$, skąd $2^m \equiv 2^n \pmod{2^j}$. W konsekwencji $2^m \equiv 2^n \pmod{2^j c}$, czyli $\pmod{n}$ – jak wymaga teza zadania.

Pozostaje przypadek, gdy $n > 8$ jest potęgą dwójki: $n = 2^j$; $j \geqslant 4$. Teraz wystarczy wziąć $m = \lfloor \frac{1}{3}n \rfloor$. Dla $j \geqslant 4$ mamy $\frac{1}{3}n = \frac{1}{3}2^j \geqslant j$, więc $m \geqslant j$; każda z liczb 2^m, 2^n dzieli się przez 2^j, czyli przez n. Wszystkie przypadki zostały rozpatrzone, dowód jest zakończony.

Klub 44 F

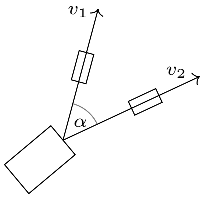
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2021

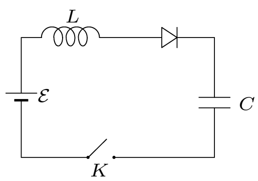
Przypominamy treść zadań:

714. Ciężka skrzynia przesuwana jest przy pomocy dwóch traktorów, które poruszają się z prędkościami $\boldsymbol{v_1}$ i $\boldsymbol{v_2}$, między którymi jest kąt α (rys. 1). Jak jest skierowany i jaką ma wartość wektor prędkości skrzyni w chwili, gdy liny są równoległe do wektorów $\boldsymbol{v_1}$ i $\boldsymbol{v_2}$?

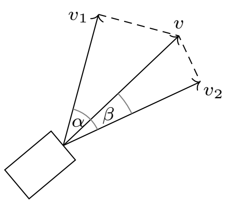
715. Do jakiego napięcia naładuje się kondensator o pojemności C po zamknięciu klucza K w obwodzie przedstawionym na rysunku 2? Jaka będzie maksymalna wartość natężenia prądu podczas ładowania? Siła elektromotoryczna baterii wynosi $\mathcal{E}$, opór wewnętrzny baterii i opory przewodów łączących są zaniedbywalne. Dioda jest idealna – w kierunku przewodzenia ma opór zerowy, a w kierunku zaporowym jej opór jest nieskończenie wielki. Indukcyjność cewki L jest na tyle duża, że proces ładowania jest powolny.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

714. Liny są nierozciągliwe, więc rzut prostopadły wektora prędkości skrzyni $\boldsymbol{v}$ na kierunek pierwszej liny ma wartość v_1, a na kierunek drugiej v_2. Wektory $\boldsymbol{v_1}$ i $\boldsymbol{v_2}$ są składowymi prędkości skrzyni, ale z różnych rozkładów na kierunki prostopadłe. Koniec wektora $\boldsymbol{v}$ znajduje się na przecięciu prostopadłych do lin, wystawionych z końców wektorów $\boldsymbol{v_1}$ i $\boldsymbol{v_2}$ (rys. 3). Z rysunku widać, że $v_1 = v\cos(\alpha-\beta)$ oraz $v_2 = v\cos\beta$. Stąd

$$v_2/v_1 = \cos\beta/(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 1/(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta),$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = v_1/(v_2\sin\alpha) - \mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Wartość wektora prędkości skrzyni dana jest wzorem

$$v = v_2/\cos\beta = v_2\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\beta}.$$

715. Oznaczmy przez $Q_{\max}$ maksymalny ładunek na kondensatorze po zakończeniu procesu ładowania. Praca źródła prądu równa jest energii pola elektrycznego wewnątrz kondensatora

$$\mathcal{E}Q_{\max} = {Q_{\max}}^2/2C, \quad \text{stąd } Q_{\max} = 2C\mathcal{E}.$$

Maksymalna wartość napięcia, do jakiego naładuje się kondensator, $U = 2\mathcal{E}$. Drugie prawo Kirchhoffa dla badanego obwodu ma postać

$$(*) \qquad \mathcal{E} - LdI/dt - Q/C = 0.$$

Gdy natężenie prądu jest maksymalne $I = I_{\max}$, jego pochodna po czasie znika i ładunek na kondensatorze $Q = C\mathcal{E}$. Z zasady zachowania energii mamy wtedy

$$\mathcal{E}Q = L{I_{\max}}^2/2 + Q^2/2C.$$

Stąd

$$I_{\max} = \mathcal{E}\sqrt{C/L}.$$

Możemy też znaleźć zależność od czasu natężenia prądu w obwodzie i ładunku na kondensatorze. Różniczkując równanie $(*)$ po czasie otrzymujemy

$$d^2I/dt^2 + I/LC = 0.$$

Rozwiązanie tego równania po uwzględnieniu, że $I(0) = 0$, ma postać

$$I = I_{\max}\sin\omega t, \quad \text{gdzie } \omega = 1/\sqrt{LC}.$$

Ładunek na kondensatorze

$$Q = -(I_{\max}/\omega)\cos\omega t + I_{\max}/\omega,$$

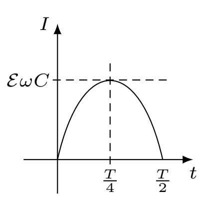
bo $Q(0) = 0$. Podstawiając I oraz Q do równania $(*)$, które musi być spełnione w każdej chwili czasu, otrzymujemy

$$I_{\max} = \mathcal{E}\omega C = \mathcal{E}\sqrt{C/L}, \qquad Q_{\max} = 2I_{\max}/\omega = 2\mathcal{E}C.$$

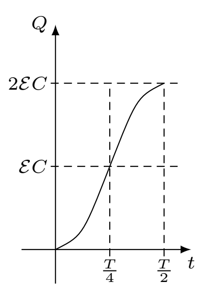
Zależność natężenia prądu w obwodzie i ładunku na kondensatorze od czasu ilustrują rysunki 4a i 4b.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 706 ($WT = 2{,}6$), 707 ($WT = 1{,}67$), 708 ($WT = 2{,}36$) i 709 ($WT = 1{,}65$) z numerów 11/2020 i 12/2020

Tomasz Wietecha	Tarnów	15 – 45,27
Jan Zambrzycki	Białystok	3 – 44,89
Michał Koźlik	Gliwice	4 – 42,82
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Konrad Kapcia	Poznań	1 – 33,63
Piotr Adamczyk	Warszawa	33,44
Paweł Perkowski	Ożarów	3 – 32,26
Ryszard Woźniak	Kraków	31,46
Jacek Konieczny	Poznań	31,33
Sławomir Buć	Mystków	29,75



Rys. 4a



Rys. 4b

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.