Kartografia (normalna) Płaszczaków

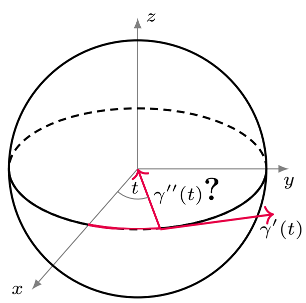
Michał MIŚKIEWICZ

Wbrew pozorom tematyka tego artykułu jest całkiem poważna, ale powołane do życia przez Edwina Abbotta *Płaszczaki** – wyimaginowane stworzenia żyjące w dwuwymiarowym świecie – są doskonałym materiałem do pewnego eksperymentu myślowego. Chodzi mianowicie o to, by o geometrii powierzchni (lub ogólniej – rozmaitości) nie myśleć w sposób *zewnętrzny*, jak człowiek patrzący na leżący przed nim obrazek, ale *wewnętrzny*, właściwy namalowanym na obrazku postaciom, których percepcja (o ile ją mają) ogranicza się do dwóch wymiarów.

* *Flatlandia, czyli kraina płaszczaków*, Edwin Abbott (1884).

Współczesna geometria wiele zawdzięcza takiemu ujęciu tematu. Bez tego nie mielibyśmy ani ogólnej teorii względności, ani teorii potoków Ricciego wraz z dowodem hipotezy Poincarégo.

Punktem wyjścia naszej historii będzie zainteresowanie Króla Płaszczaków kształtem własnego królestwa $\mathcal{M}$. W celu stworzenia mapy Król wysłał swoich rycerzy ze stolicy S we wszystkie kierunki świata z nakazem pójścia prosto przed siebie ze stałą prędkością (każdy z tą samą). Po powrocie każdy miał zdać raport, podając napotkane punkty charakterystyczne wraz z odległością od stolicy. Znając kierunki ich podróży, Król może potem nanieść te punkty na tworzoną przez siebie mapę królestwa, zwaną mapą *wykładniczą* lub po prostu *normalną*. Proste?

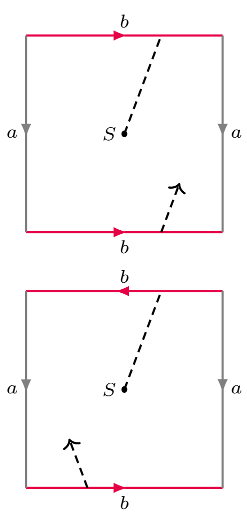


Geodezyjna na sferze

Nie do końca. Na początek warto wyjaśnić, co znaczy *prosto przed siebie*. W tym celu oznaczmy przez $\gamma(t)$ położenie danego rycerza w chwili t; innymi słowy, jego ruch opisujemy funkcją $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathcal{M}$. Według rozkazu Króla:

- rycerz wyrusza ze stolicy, czyli $\gamma(0) = S$;
- ma wyznaczony kierunek podróży, a więc $\gamma'(0)$ jest z góry zadanym wektorem początkowej prędkości (dla ustalenia uwagi – jednostkowym);
- ma się poruszać prosto przed siebie ze stałą prędkością, co wyraża się przez brak przyspieszenia, czyli warunek $\gamma''(t) = 0$ dla wszystkich $t > 0$.

W świecie Płaszczaków, czyli – na dobrą sprawę – w świecie zupełnych rozmaitości Riemanna, takie równanie różniczkowe zwyczajne $\gamma'' = 0$ ma jednoznaczne rozwiązanie. To rozwiązanie, czyli krzywą $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathcal{M}$, nazywamy *geodezyjną* (o zadanym punkcie początkowym i prędkości początkowej).

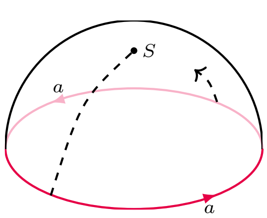


Torus i butelka Kleina z przykładową geodezyjną

Dla mieszkańców sfery (w dobrym przybliżeniu – dla nas samych) geodezyjnymi są fragmenty okręgów wielkich, czyli krzywych powstałych przez cięcie sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej środek. Na sferze jednostkowej

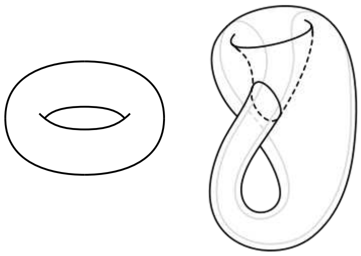
$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(rozumianej jako podzbiór $\mathbb{R}^3$) przykładową geodezyjną jest krzywa $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Czytelnik znający rachunek różniczkowy może obliczyć drugą pochodną każdej ze współrzędnych i zaprotestować, że otrzymany wektor $(-\cos t, -\sin t, 0)$ nie jest zerowy. Sęk w tym, że jest to obliczenie drugiej pochodnej funkcji o wartościach w $\mathbb{R}^3$, a nie w $\mathbb{S}^2$! Natomiast przyspieszenie odczuwane przez Płaszczaka poruszającego się tą krzywą (czyli *wewnętrzna* druga pochodna funkcji $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$) jest rzutem wyznaczonego wyżej wektora na płaszczyznę styczną do sfery w $\gamma(t)$, a rzut ten rzeczywiście jest zerowy.



Płaszczyzna rzutowa z przykładową geodezyjną

Pouczeni tym przykładem spójrzmy jeszcze na trzy inne – torusa, butelkę Kleina i płaszczyznę rzutową. Pierwsze dwie powierzchnie można przedstawić jako kwadrat z odpowiednio sklejonymi bokami, przy czym strzałki wskazują, co z czym łączyć; w obu przypadkach boki oznaczone strzałką a łatwo skleić, otrzymując walec. Dla torusa sklejenie strzałek b jest możliwe, chociaż kosztem pewnego zdeformowania materiału (a więc i geometrii!), co daje dobrze znany kształt dętki rowerowej. Do sklejenia butelki Kleina potrzebujemy albo pewnego oszustwa (samoprzecięcia), albo odrobiny czwartego wymiaru. To samo tyczy się płaszczyzny rzutowej, zadanej jako półsfera, na której brzegu sklejono punkty antypodyczne.



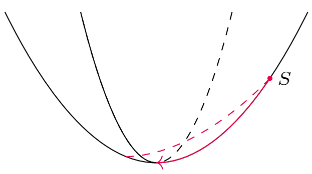
Czego Płaszczak nie zobaczy: torus jako dętka i butelka Kleina jako powierzchnia z samoprzecięciem

Nie przejmujmy się tym czwartym wymiarem – wszak Płaszczaki i tak dostrzegają jedynie dwa wymiary, więc dla nich to niewielka różnica. Do wyznaczenia geodezyjnych wyjściowe diagramy w zupełności wystarczą, co zresztą zostało już przedstawione na rysunkach.

Czas na drugą trudność – czy rycerze kiedykolwiek trafią z powrotem do stolicy, by zdać raport? Na sferze tak, ale na torusie większość z nich będzie błądzić w nieskończoność. By tego uniknąć, Król wydał dodatkowy rozkaz:

- każdy rycerz ma zakończyć swoją misję, gdy tylko napotka innego rycerza lub jego ślady.

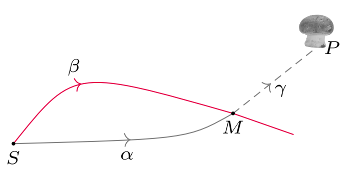
Zakładając, że królestwo jest skończone – w języku technicznym *zwarte* – zagwarantował w ten sposób, że po pewnym czasie wszyscy rycerze będą mogli wrócić i zdać raport z odwiedzonych miejsc. I w ten sposób dochodzimy do trzeciej i najważniejszej trudności – czy w takiej sytuacji możemy mieć pewność, że **każdy punkt w królestwie znajdzie się na mapie?**



Droga rycerza zmuszonego do zatrzymania się w wierzchołku paraboloidy $z = x^2 + y^2$. Przerywaną linią zaznaczono inną, krótszą drogę na drugą stronę wierzchołka

Warto zauważyć, że rycerze mogą się spotykać (i w rezultacie zatrzymywać) w parach, czwórkach, a nawet i wszyscy naraz! Na szczególną uwagę zasługuje paraboloida $z = x^2 + y^2$ i los rycerza wysłanego z $S = (1, 0, 1)$ w kierunku wierzchołka $(0, 0, 0)$. Chociaż dochodzi on tam jako pierwszy i jedyny, to jest zmuszony się zatrzymać, a to dlatego, że w każdym następnym punkcie jego trasy ktoś go już ubiegł.

Pozostaje przekonać się o kompletności powstałej mapy – sprawdziliśmy to na kilku przykładach, ale czas na ogólny dowód. Dla ustalenia uwagi sprawdzimy, czy na mapie znajdzie się Pieczara Smoka (punkt P). W tym celu rozważmy najkrótszą drogę z S do P. O takiej najkrótszej drodze wystarczy nam wiedzieć, że istnieje (co najmniej jedna) oraz że na pewno jest geodezyjną. Wynika stąd, że droga ta jest tożsama z trasą pewnego rycerza $\mathcal{A}$. Jeśli P nie znajduje się w jego raporcie, to widocznie $\mathcal{A}$ zatrzymał się już wcześniej. Oznacza to jedną z dwóch rzeczy:



Porównanie drogi rycerza $\mathcal{A}$ (α) z drogą rycerza $\mathcal{B}$ (β). Przez γ oznaczono brakujący fragment, którego $\mathcal{A}$ nie zdążył przejść

– Przed dotarciem do P rycerz $\mathcal{A}$ napotkał ślady innego rycerza $\mathcal{B}$ w pewnym pośrednim punkcie M. Widocznie $\mathcal{B}$ odnalazł krótszą drogę β z S do M, więc łącząc ją z brakującym fragmentem γ, otrzymujemy drogę $\beta \cup \gamma$ z S do P krótszą od drogi $\alpha \cup \gamma$. Ale o tej drugiej założyliśmy, że jest najkrótsza – sprzeczność!

– Zatrzymał się w momencie spotkania innego rycerza $\mathcal{B}$ w pewnym punkcie M. Skoro obaj doszli do M jednocześnie, to ich trasy α, β mają tę samą długość. A skoro $\alpha \cup \gamma$ jest najkrótszą drogą z S do P, to jest nią również $\beta \cup \gamma$. Z naszej wiedzy o najkrótszych drogach wynika wtedy, że $\beta \cup \gamma$ musi być geodezyjną! To jest jednak sprzeczność z jednoznacznością geodezyjnych, gdyż rozpatrując trasy $\alpha \cup \gamma$ i $\beta \cup \gamma$ przebywane wstecz, otrzymujemy dwie różne geodezyjne dzielące wspólny początkowy fragment.

Ostatecznie możemy stwierdzić z całą pewnością, że każdy punkt królestwa znajduje się na mapie, i prawie każdy w jednym egzemplarzu. Wyjątek stanowią leżące na brzegu mapy *punkty cięcia* (*cut points*), czyli końcowe punkty dróg rycerzy. O zbiorze wszystkich takich punktów (po angielsku nazywanym *cut locus*) wiadomo, że ma zerowe pole (zarówno jako podzbiór mapy, jak i podzbiór królestwa), więc jest niejako zaniedbywalny. Co nie znaczy, że nie jest ważny!

The Shape of Space, Jeffrey Weeks, wyd. 2 (2002).
Autor prowadzi Czytelników od geometrycznych przygód Płaszczaków, licznych przykładów i gier, przez klasyfikację powierzchni aż do kosmologii i hipotezy geometryzacyjnej Thurstona (którego był doktorantem). Część gier jest dostępna online: geometrygames.org/SoS.

Czytelnika zainteresowanego zgłębieniem jego geometrii zachęcam do pochylenia się nad poniższymi zadaniami oraz do lektury książki *The Shape of Space*, która opisuje wiele innych przygód Płaszczaków wraz z ich geometrycznymi konsekwencjami.

Zadanie 1. Przekonać się, że na płaszczyźnie rzutowej punkty cięcia tworzą zamkniętą pętlę, która jednak nie rozdziela powierzchni na dwie części.

Zadanie 2. Naszkicować zbiór punktów cięcia, gdy królestwo Płaszczaków ma kształt torusa-dętki-rowerowej. Czy zbiór ten tworzy pętlę?

Zadanie 3. Przyjmijmy, że królestwo Płaszczaków ma kształt paraboloidy zadanej równaniem $z = x^2 + y^2$ i stolicę w punkcie $S = (1, 0, 1)$. Naszkicować mapę królestwa, jak również samą paraboloidę z zaznaczonymi punktami cięcia.