Tak połączone w sieć anteny działają jak elementy jednego dużego teleskopu, o wielkości równej odległości między parą najdalej położonych od siebie anten. W ten sposób ALMA uzyskuje rozdzielczość nawet dziesięciokrotnie wyższą niż Kosmiczny Teleskop Hubble'a.

Poprzez transformację Fouriera interferometryczny wzór może zostać następnie przekształcony w matematyczną reprezentację oryginalnego sygnału – obraz obserwowanego obiektu. Analizując obserwacje interferometryczne, należy więc pamiętać, że nie patrzymy na rzeczywisty obraz nieba, jak to ma miejsce w przypadku detektorów optycznych, ale jego matematyczną reprezentację, odtworzoną ze wzoru interferometrycznego. Analiza takich danych jest bardziej skomplikowana, gdyż niektóre struktury mogą być nieistniejącymi w rzeczywistości artefaktami transformacji Fouriera, niebędącymi reprezentacją rzeczywistych właściwości obserwowanego obiektu.

Teleskopy milimetrowe i interferometria radiowa dostarczyły najciekawsze odkrycia i obrazy obiektów autonomicznych ostatnich lat, takie jak szczegółowe mapy dysków protoplanetarnych czy obraz czarnej dziury w sercu galaktyki M87. Dzięki rozwojowi tej dziedziny w ciągu ostatniej dekady odkrywamy ciemny i zimny kosmos, który wcześniej był przed nami ukryty.

Rozwiązanie zadania M 1680.
Układ równań możemy równoważnie zapisać jako

$$\begin{cases} y = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \\ z = \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \\ x = \frac{3z-z^3}{1-3z^2} \end{cases}$$

Ponieważ

$$\mathrm{tg}(3\alpha) = \frac{3\,\mathrm{tg}(\alpha) - \mathrm{tg}(\alpha)^3}{1 - 3\,\mathrm{tg}(\alpha)^2},$$

więc podstawiając $x = \mathrm{tg}(\alpha)$, dla pewnego $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, widzimy, że pierwsze równanie przedstawia się jako $y = \mathrm{tg}(3\alpha)$, drugie jako $z = \mathrm{tg}(9\alpha)$, a trzecie jako $x = \mathrm{tg}(27\alpha)$. Wobec tego $\mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{tg}(27\alpha)$, więc

$$(x, y, z) = \left(\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{26}, \mathrm{tg}\,\frac{3k\pi}{26}, \mathrm{tg}\,\frac{9k\pi}{26}\right)$$

dla $k \in \{\pm1, \pm2, \ldots, \pm12\}$.

Jak nie wierzyć w liczby rzeczywiste?

*Aleksy SCHUBERT**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Dyskusje na temat wiary matematycy zwykle uważają za coś wykraczającego poza zakres ich aktywności. Nie zmienia to jednak faktu, że czasem na ten temat się wypowiadają. Na przykład Leonhard Euler w swoim dziele *Vollständige Anleitung zur Algebra* z 1770 roku pisał tak:

> *Ponieważ wszystkie liczby, jakie można sobie wyobrazić, są albo większe od 0, albo mniejsze od 0, albo równe 0, to jasne jest, że pierwiastki kwadratowe liczb ujemnych nie mogą być uważane za możliwe liczby [liczby rzeczywiste]. W związku z tym musimy przyjąć, że takie liczby są niemożliwe. To zaś prowadzi nas do pojęcia liczb, które ze swej istoty są niemożliwe, a zwykle nazywane liczbami urojonymi albo fantastycznymi, gdyż istnieją one tylko w wyobraźni.*

Tak oto sławny matematyk poddał w wątpliwość istnienie liczb urojonych, czy szerzej – zespolonych, które dziś stanowią jeden z centralnych obiektów badawczych matematyki.

Dlaczego jednak w ogóle można poddawać w wątpliwość istnienie czegoś, co zostało nazwane *rzeczywistym*? Cóż, sięgnijmy po wypowiedź innego sławnego matematyka, Leopolda Kroneckera. Przypisuje mu się taką wypowiedź:

> *Liczby naturalne stworzył dobry Bóg. Reszta jest dziełem człowieka.*

Według tego zdania ewidentnie liczby rzeczywiste mają gorszy status niż naturalne. Możemy zatem uciec się do naszej dociekliwości i zacząć zgłębiać różnice między liczbami naturalnymi a rzeczywistymi, zwłaszcza te dotyczące intuicji leżących u podstaw ich istnienia.

Liczby naturalne mają to do siebie, że łatwo jest nam znaleźć w naszym otoczeniu ich *reprezentacje* fizyczne. Na przykład reprezentacją fizyczną liczby 5 jest pięć palców mojej prawej ręki, a reprezentacją fizyczną liczby 2 jest dwoje moich uszu. Natychmiast ktoś może powiedzieć, że reprezentacją fizyczną liczby rzeczywistej jest punkt na prostej. Zaraz, zaraz, ale czy punkt jest czymś, co istnieje w świecie fizycznym? Przecież gdy narysujemy punkt na prostej, to on ma jakąś długość. Wtedy jednak trudno jest nam powiedzieć, jaką faktycznie liczbę reprezentuje. Może reprezentuje tylko liczbę wymierną? – takich jest przecież mnóstwo w zakresie, na jakim jest rozpięty.

Jednak żeby zacząć mówić bardziej precyzyjnie o powyższych rozróżnieniach, dobrze jest dokładniej wiedzieć, czym jest liczba rzeczywista. Otóż potrzebę

Rozwiązanie zadania F 1028.
Po wejściu w obszar działania pola magnetycznego naładowana cząstka porusza się po skomplikowanym torze (po krzywej śrubowej wokół linii sił pola) i opuszcza ten obszar z prędkością o zmienionym kierunku oraz niezmienionej wartości w stosunku do prędkości, z jaką w ten obszar weszła. Jeśli względem obserwatora cząstka porusza się z prędkością $\vec{v}$ i zderza się z obszarem występowania pola (obłok zjonizowanego gazu) poruszającego się względem obserwatora z prędkością $\vec{u}$, to względem pola prędkość cząstki wynosi $\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}$ przed zderzeniem i $\vec{V}'$ po zderzeniu, przy czym $|\vec{V}'| = |\vec{V}|$. Po zderzeniu obserwator zarejestruje cząstkę o prędkości $\vec{w} = \vec{u} + \vec{V}'$. Największy wzrost energii kinetycznej cząstki obserwator zarejestruje, gdy zwroty $\vec{v}$ i $\vec{u}$ są przeciwne, a w wyniku zderzenia kierunek prędkości cząstki względem pola zmieni się na przeciwny. Zmiana energii kinetycznej cząstki o masie m wyniesie wówczas (obliczenie dla prędkości znacznie mniejszych od prędkości światła):

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}m(v + 2u)^2 - \tfrac{1}{2}mv^2 = 2mu(v + u).$$

Udowodniliśmy, że zaproponowany mechanizm może prowadzić do przyspieszania cząstek.
W pracach dotyczących omawianego efektu Fermi przeprowadził obliczenia w ramach szczególnej teorii względności – obliczenia i wynik są nieco bardziej skomplikowane, ale wniosek pozostaje niezmieniony.

E. Fermi, Physical Review **75**, 1169 (1949);
E. Fermi, The Astrophysical Journal **119**, 1 (1954).

istnienia innych liczb niż naturalne i wymierne widzieli już starożytni Grecy. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do kwadratu o boku 1 wynikało, że jego przekątna ma długość $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Z kolei, jeśli przyjąć, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, to $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, gdzie p i q są naturalne. Z tego stosunkowo szybko dojdziemy do równości $2q^2=p^2$. Jednak ta jest niemożliwa do spełnienia, bo jakie by liczby p i q nie były, to lewa strona tej równości ma w rozkładzie na czynniki pierwsze nieparzystą liczbę wystąpień 2, prawa zaś – parzystą.

Grecy znaleźli też sposób na radzenie sobie z takimi liczbami, a nawet dwa sposoby. Jeden z nich, pochodzący od Eudoksosa, polegał na tym, żeby nie przejmować się specjalnie dokładnym wyrażeniem liczby, ale operować na przybliżeniach, w razie czego dokładność przybliżenia dostosowując do problemu, jaki rozwiązujemy. Inne podejście, pochodzące od Teajtetosa, zasadzało się na zapisywaniu liczby w postaci ułamka łańcuchowego. I tak liczbę $\sqrt{2}$ można zapisać w postaci łatwego do intuicyjnego odczytania ułamka

To tak jak i dzisiaj – w zadaniach z fizyki czy chemii operujemy tak dużym przybliżeniem dziesiętnym, jak duże jest nam potrzebne do uzyskania zadowalającego wyniku końcowego.

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}.$$

Poniższych ułamków starożytni zapewne nie znali, ale warto zobaczyć, jak ładnie w tej postaci zapisują się liczby π oraz e:

$$\pi=3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cdots}}}\qquad e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}}}}$$

Rozwiązanie zadania M 1678.
Nazwijmy dwóch graczy *sąsiadami*, jeśli pochodzą z tego samego miasta.
Przypuśćmy, że w którejś rundzie nie było meczu pomiędzy sąsiadami. Możemy zatem w tej rundzie podzielić uczestników na pary osób z różnych miast.
Weźmy pod uwagę dowolnego uczestnika. Jego przeciwnik w tej rundzie nie jest jego sąsiadem, a w każdej innej partii gra nie więcej niż jeden jego sąsiad. Wobec tego mniej niż połowa wszystkich przeciwników wybranego uczestnika to jego sąsiedzi.
Oznacza to, że każdy uczestnik rozegrał więcej gier z niesąsiadami niż z sąsiadami, a zatem łączna liczba rozgrywek między sąsiadami wyniosła mniej niż połowę wszystkich rozgrywek – sprzeczność.

Współczesne pojęcie liczby rzeczywistej ukształtowało się w XIX wieku. Wtedy pojawiły się dwie definicje liczb rzeczywistych. Jedna z nich wprowadzała je przez tzw. *przekroje Dedekinda*. Druga przez tzw. *ciągi Cauchy'ego*. Chociaż ta pierwsza definicja ma matematycznie lepsze własności, to skupimy się na tej drugiej – jest ona bliższa naszemu codziennemu doświadczeniu liczb rzeczywistych przedstawianych w postaci rozwinięcia dziesiętnego. Przez ciąg Cauchy'ego będziemy rozumieli takie przyporządkowanie liczbom naturalnym liczb wymiernych, że zachodzi następujący warunek:

> dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje takie miejsce N w ciągu, że dla dowolnych liczb m,k większych od N liczba przyporządkowana m różni się od liczby przyporządkowanej k o mniej niż $\frac{1}{10^n}$.

Według tej definicji, jeśli będziemy rozważali kolejne elementy ciągu

$$a_1=3,\quad a_2=3{,}1,\quad a_3=3{,}14,\quad \ldots,$$
$$a_n=\text{rozwinięcie } \pi \text{ do } n-1 \text{ miejsc po przecinku},\ldots$$

to dla dowolnego $\frac{1}{10^n}$ od pewnego momentu, a konkretnie od $N=n+1$, dowolne elementy o dalszych indeksach będą się od siebie różniły o mniej niż $\frac{1}{10^n}$.

Co ciekawe, po pewnej dozie zastanowienia, możemy dojść do wniosku, że rozwinięcia dziesiętne, z wyjątkiem jednego małego drobiazgu, jednoznacznie opisują wszystkie liczby rzeczywiste. To drobne zaburzenie, o którym wspominam na marginesie, łatwo jest usunąć i nie wpływa ono na prawdziwość tego, o czym piszę dalej.

Chodzi o to, że liczba 1 da się zapisać także jako 0,(9), czyli ułamek nieskończony z samymi dziewiątkami w rozwinięciach dziesiętnych.

Tak ukształtowane pojęcie liczb rzeczywistych nie budziło już wątpliwości wśród matematyków, ponieważ dobrze dawało się wpasować w podzielaną przez ogromną większość społeczności matematycznej platonistyczną wizję istnienia. W ramach tej wizji cechę istnienia gotowi jesteśmy przypisać *wszystkim* rzeczom dającym się sprowadzić za pomocą dobrze znanych narzędzi do bytów wcześniej już uznanych za istniejące, czyli w języku matematyki rzeczom, dla których

Rozwiązanie zadania F 1027.
Pęknięcie wieży (kolumny) z piasku wzdłuż płaszczyzny wymaga zerwania sił przylegania ziaren piasku spowodowanych istnieniem „mostków” z wody zwilżającej piasek. Potrzebna do tego siła T działająca równolegle do powierzchni S' pęknięcia jest proporcjonalna do liczby zerwanych mostków, a więc do powierzchni pęknięcia S':

$$T = c \cdot S'.$$

Przesunięcie części kolumny nad pęknięciem wymaga działania dodatkowej siły pokonującej tarcie. Dla powierzchni pod kątem α do poziomu wymaga to, aby składowa F_t ciężaru kolumny F, styczna do pęknięcia, spełniała warunek:

$$F_t > c \cdot S' + \mu F_n,$$

gdzie F_n oznacza siłę prostopadłą do płaszczyzny pęknięcia. Źródłem sił F_t i F_n jest ciężar F górnej części kolumny: $F_t = F \sin\alpha$, $F_n = F\cos\alpha$. Dodatkowo $S' = S/\cos\alpha$, gdzie S oznacza pole przekroju poziomego. Otrzymujemy warunek:

$$F > \frac{c \cdot S}{\sin\alpha\cos\alpha - \mu\cos^2\alpha}.$$

Najmniejsza siła (F_{kr}) spełniająca warunek odpowiada kątowi α_m, dla którego mianownik przyjmuje wartość maksymalną. Warunek konieczny maksimum: $\cos 2\alpha_m + \mu \sin 2\alpha_m = 0$. Po podstawieniu $\operatorname{tg}\phi = \mu$ i skorzystaniu z własności funkcji trygonometrycznych otrzymujemy: $\alpha_m = \pi/4 + \phi/2$, dla piasku $\alpha_m \approx 60°$, a krytyczna wartość siły F to:

$$F_{kr} = \frac{c \cdot S}{1 - \sin\phi}.$$

Czytelników Dociekliwych czytających *Deltę* na plaży zachęcamy do wykonania odpowiednich obserwacji i pomiarów.

da się pokazać *model*. Tutaj za istniejące uważamy liczby naturalne, ciągi nieskończone oraz wyniki działań na zbiorach bytów już istniejących.

Jest jeszcze drugi ważny sposób uznawania rzeczy za istniejące w ramach platonistycznego spojrzenia. Można za istniejące uznać takie byty, które możemy opisać za pomocą pewnych praw podstawowych, tzw. *aksjomatów*, a te w sposób systematyczny odnieść do rzeczywistości. Na tej zasadzie uznajemy istnienie punktów i prostych w geometrii Euklidesowej czy liczb naturalnych. Na tej też zasadzie były rozumiane liczby rzeczywiste przed pojawieniem się tych definicji, ale nie było dobrego narzędzia do określenia pełnego zbioru aksjomatów tych liczb.

Wszystko to wygląda bardzo dobrze, dopóki jednak nie przyjrzymy się temu, ile jest liczb rzeczywistych. Otóż niemiecki matematyk Georg Cantor pokazał, że liczb rzeczywistych – reprezentowanych jako nieskończone ciągi rozwinięć dziesiętnych – jest istotnie więcej niż liczb naturalnych. Na tyle więcej, że nie istnieje przekształcenie z liczb naturalnych, które „wyczerpałoby” wszystkie liczby rzeczywiste. Skądinąd wiadomo, że wszelkich zapisów skończonych, jakie można dokonać za pomocą skończonego zestawu znaków, jest co najwyżej tyle, ile liczb naturalnych. Zatem gdybyśmy użyli do ich wykonania *wszystkich* przedmiotów ze znanego nam, siłą rzeczy skończonego, świata, to nie dalibyśmy rady opisać wszystkich liczb rzeczywistych – nawet przy założeniu, że dysponujemy nieskończoną energią i czasem oraz możemy układać te przedmioty na wszystkie możliwe sposoby. Tego nie dałoby się zrobić, nawet używając *wszystkich* liczb naturalnych! Zatem tak jak łatwo znajdujemy skończone reprezentacje dla liczb naturalnych w naszym świecie, nie uda się to z liczbami rzeczywistymi. Mamy tutaj jeszcze jeden dodatkowy kłopot: chciałoby się pokazać choć jedną taką liczbę, w którą możemy na tej zasadzie nie wierzyć – żeby było wiadomo, w co nie wierzyć. Tymczasem tego nie jesteśmy w stanie w ogóle zrobić.

Oczywiście ten argument nie oznacza, że wszystkie liczby rzeczywiste nie mają reprezentacji. Widzieliśmy wcześniej w tym tekście, że $\sqrt{2}, \pi$ czy e swoje reprezentacje mają, choćby w postaci ułamków łańcuchowych. Możemy pójść nieco dalej i pokusić się o bardzo ogólną, pochodzącą w istocie swej od Alana Turinga, definicję *obliczalnej liczby rzeczywistej.*

Co ciekawe, bardzo podobne pojęcie liczby pojawiło się w notatkach Ady Lovelace. Kto wie, gdyby maszyna analityczna Babagge'a powstała w XIX wieku, możliwe, że używalibyśmy właśnie takiego pojęcia liczby rzeczywistej.

> Liczba rzeczywista x jest obliczalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje algorytm, czyli przepis, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, taki że dla każdej liczby n
>
> $$f(n) \quad \leqslant \quad x \quad < \quad f(n) + \frac{1}{10^n}.$$

To jedna z wielu możliwych równoważnych definicji tego pojęcia, napisana tak, aby lepiej pasowała do rozwinięć dziesiętnych liczb.

Takie liczby będą miały swoje reprezentacje w postaci wspomnianych wyżej *przepisów*. Z kolei przepisy możemy zakodować w postaci liczb naturalnych na przykład tak: ponumerujmy wszystkie słowa w słowniku języka polskiego oraz znaki interpunkcyjne. Niech przepis składa się z ciągu słów i znaków przestankowych $w_1, \ldots, w_k$. Niech odpowiadające im liczby według powyższego ponumerowania będą równe, odpowiednio, $n_1, \ldots, n_k$. Przepis możemy zareprezentować jako liczbę $2^{n_1} \cdot 3^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, gdzie $p_1, \ldots, p_k, \ldots$ to kolejne liczby pierwsze. Oczywiście nie wszystkie liczby dadzą po odkodowaniu „sensowne” przepisy, ale za to wszystkie „sensowne” przepisy dadzą się w ten sposób przedstawić jako liczby.

Są matematycy, którzy zajmują się tak określonym pojęciem liczby obliczalnej. Wydaje się jednak, że nie zastąpi ono tradycyjnego podejścia, już choćby dlatego, że ciężko byłoby namówić rzesze studentów do dodatkowej regularnej pracy polegającej na pokazywaniu, iż taki czy inny ciąg jest obliczalny. Jednak jak ktoś chce, to może nie wierzyć we wszystkie liczby rzeczywiste, a jedynie w te, łatwiejsze do przyjęcia, obliczalne, zapisywalne jako program komputerowy. Ta wizja jest szczególnie bliska mnie, informatykowi. Tymczasem dla chętnych dwa ciekawe pytania: czy suma liczb obliczalnych jest obliczalna? I drugie, trudniejsze: czy iloczyn liczb obliczalnych jest obliczalny? Na oba pytania odpowiedź jest pozytywna, ale sam proces dojścia do niej jest bardzo ciekawy i odkrywczy.

Odpowiedź do zagadki z *Małej Delty*:
Wystarczy przyciąć lustro wysokie na 90 cm. Trzeba je jeszcze tylko odpowiednio zawiesić. Żebyśmy mogli zobaczyć się w całości, górna krawędź lustra powinna znaleźć się dokładnie w połowie wysokości między czubkiem głowy a oczami. A gdybyśmy chcieli zobaczyć w nim również nasze stopy, nie może ich zasłaniać żadna szafka ani umywalka...