Klub 44 F

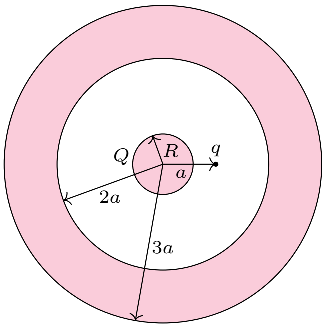
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2021

Zadania z fizyki nr 720, 721

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

720. Satelita Ziemi o masie $m = 10$ kg porusza się po orbicie kołowej w wysokich warstwach atmosfery i działa na niego siła oporu $F = 5 \cdot 10^{-4}$ N ze strony rozrzedzonego powietrza. O ile zmieni się prędkość satelity po wykonaniu jednego obrotu wokół Ziemi? Odległość satelity od Ziemi jest mała w porównaniu z promieniem Ziemi. Przyjmij, że promień Ziemi $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, przyspieszenie na powierzchni Ziemi $g = 9{,}8$ m/s^2.

721. Metalowa kula o promieniu R, naładowana ładunkiem Q oraz ładunek punktowy q umieszczony w odległości a od środka kuli otoczone są współśrodkową z kulą metalową warstwą sferyczną o promieniach wewnętrznym $2a$ i zewnętrznym $3a$ (rys. 1), naładowaną ładunkiem $2Q$. Znaleźć potencjały kuli oraz otaczającej ją metalowej powłoki.

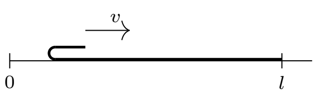


Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 2/2021

Przypominamy treść zadań:

712. Długi, cienki i wiotki dywan o długości l i masie m leży na podłodze. Jeden z końców dywanu jest odgięty i ciągnięty do tyłu ze stałą prędkością v po części dywanu, która nadal leży na podłodze (rys. 2). Jaka siła działa na dywan w kierunku poziomym? Tarcia między częściami dywanu nie uwzględniamy, dolna część dywanu pozostaje nieruchoma.



Rys. 2

713. Ze szczytu góry na szerokości geograficznej północnej $\varphi_0 = 30^o$ wystrzelono pocisk wzdłuż południka, w kierunku północnego bieguna Ziemi i wprowadzono go na orbitę kołową wokół Ziemi. Oblicz maksymalną szerokość geograficzną, jaką osiągnie wystrzelony pocisk. Dane są: okres obrotu Ziemi wokół własnej osi T, promień Ziemi R, przyspieszenie grawitacyjne g. Zakładamy, że Ziemia jest jednorodną kulą i zaniedbujemy opory powietrza.

712. Niech x oznacza współrzędną ruchomego końca dywanu (rys. 3). Jego prędkość jest równa $v = \Delta x/\Delta t$.

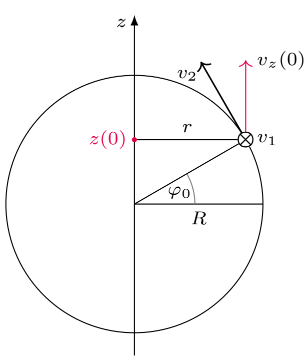
Rys. 3

Szukana siła F powoduje zmianę pędu tej części dywanu o masie Δm, która w czasie Δt podnosi się z podłogi

$$F = \Delta p/\Delta t = \Delta m v/\Delta t.$$

Z rysunku 3 widać, że $\Delta m = \lambda \Delta x/2$, gdzie $\lambda = m/l$. Stąd $F = mv^2/2l$. Możemy też znaleźć położenie środka masy całego dywanu w funkcji współrzędnej x jego ruchomego końca $x_S = (2l^2 + x^2)/4l$, jego prędkość $v_S = xv/2l$ oraz przyspieszenie $a_S = v^2/2l$. Szukana siła $F = ma_S$.

713. Pocisk porusza się po orbicie kołowej pod wpływem siły grawitacji, która pełni rolę siły dośrodkowej. Jego prędkość $v = \sqrt{gR}$. W chwili startu składowa tej prędkości w kierunku równoleżnika o promieniu r (rys. 4) wynosi



Rys. 4

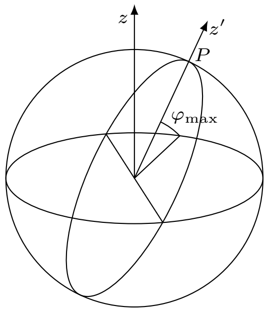
$$v_1 = 2\pi r/T = (2\pi R \cos\varphi_0)/T,$$

składowa wzdłuż południka

$$v_2 = \sqrt{v^2 - {v_1}^2} = \sqrt{gR - (2\pi R\cos\varphi_0)^2/T^2}.$$

Narysujmy średnicę okręgu, po którym porusza się pocisk, przechodzącą przez punkt toru P na największej szerokości geograficznej $\varphi_{\max}$ osiąganej przez pocisk (rys. 5). Niech oś z' przechodzi przez tę średnicę. Rzut ruchu pocisku na tę średnicę jest ruchem harmonicznym o częstości $\omega = v/R$ i opisują go równania

$$z'(t) = R\sin(\omega t + \alpha), \quad v_{z'}(t) = R\omega\cos(\omega t + \alpha).$$



Rys. 5

Rzutując go następnie na oś z przechodzącą przez biegun północny, otrzymujemy

$$z(t) = z'(t)\sin\varphi_{max}, \quad v_z(t) = v_{z'}(t)\sin\varphi_{\max}.$$

Przyjmując chwilę wystrzału za chwilę zerową i korzystając z rysunku 4, możemy napisać warunki początkowe

$$z(0) = R\sin\varphi_0 = R\sin\varphi_{\max}\sin\alpha, \quad v_z(0) = v_2\cos\varphi_0 = R\omega\sin\varphi_{\max}\cos\alpha.$$

Podnosząc te równania do kwadratu i dodając stronami, pozbywamy się wyrazów zawierających fazy początkowe α. Szukana maksymalna szerokość geograficzna spełnia równanie

$$\sin\varphi_{\max} = \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 R\cos^4\varphi_0}{gT^2}}.$$

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2021

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 809 ($WT = 1{,}83$) i 810 ($WT = 2{,}03$) z numeru 11/2020

Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Jerzy Cisło	Wrocław	39,07
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74
Marcin Kasperski	Warszawa	32,68
Mikołaj Pater	Opole	32,35
Kacper Morawski	Warszawa	30,53

Zadania z matematyki nr 823, 824

Redaguje Marcin E. KUCZMA

823. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z spełniające układ równań
$$\frac{\sin x}{2} = \frac{\sin y}{3} = \frac{\sin z}{4} = -\sin(x+y+z).$$

824. Niech $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych ($p_1 = 2$). Dla $n \geqslant 1$ niech q_n oznacza liczbę wyrazów tego ciągu, które są mniejsze od n (w zwykle używanej notacji: $q_n = \pi(n-1)$) i niech $a_n = n + p_n$, $b_n = n + q_n$. Udowodnić, że każda liczba całkowita dodatnia jest wyrazem dokładnie jednego z ciągów (a_n), (b_n).

Zadanie 824 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2021

Przypominamy treść zadań:

815. Wyznaczyć wszystkie trójki funkcji $f, g, h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, spełniające równanie
$$f(x+y^3) + g(x^3+y) = h(xy) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

816. Liczba naturalna n ma taki dzielnik dodatni d, że $d^2 - 2$ dzieli się przez $n-1$. Wykazać, że n jest podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

815. Niech f, g, h będzie trójką funkcji spełniających podane równanie. Biorąc $x = 0$, dostajemy $g(y) = h(0) - f(y^3)$; a po wstawieniu do wyjściowego równania:

$$(1) \qquad f(x+y^3) + h(0) - f\big((x^3+y)^3\big) = h(xy).$$

Podstawienie $y = -x^3$ daje zależność

$$(2) \qquad f(x - x^9) = h(-x^4) - h(0) + f(0).$$

Różnica $x - x^9$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste oraz zmienia znak przy zamianie x na $-x$. Stąd wniosek, że f jest funkcją parzystą.

Ustalmy liczbę $w < 0$. Wykażemy, że $h(w) = h(0)$. Wystarczy w tym celu znaleźć liczby x, y takie, że

$$(3) \qquad (x^3+y)^3 = -(x+y^3) \quad \text{oraz} \quad xy = w,$$

bowiem wówczas (wobec parzystości f) lewa strona (1) przyjmuje wartość $h(0)$. Dla $xy = w$ pierwsze równanie (3) pomnożone stronami przez x^3 ($\neq 0$) przybiera postać

$$(4) \qquad (x^4+w)^3 + x^4 + w^3 = 0.$$

Wielomian (zmiennej x) po lewej stronie (4) ma dla $x = 0$ wartość ujemną, a dla dużych $|x|$ wartość dodatnią, więc dla pewnego x_0 ma wartość 0. Biorąc $y_0 = w/x_0$, uzyskujemy spełnienie obu związków (3), wystarczających do uzasadnienia równości $h(w) = h(0)$.

Wobec dowolności wyboru liczby $w < 0$ znaczy to, że funkcja h jest stała na przedziale $(-\infty, 0]$. Teraz równanie (2) pokazuje, że $f(x - x^9) = f(0)$ dla wszystkich x; czyli f jest funkcją stałą na zbiorze liczb rzeczywistych. Zatem także funkcja $g(y) = h(0) - f(y^3)$ jest stała oraz (dzięki równaniu wyjściowemu) funkcja h jest stała. Jasne, że każda trójka funkcji stałych $f \equiv A$, $g \equiv B$, $h \equiv A + B$ spełnia zadane równanie.

816. Gdy $d = 1$, więc $d^2 - 2 = -1$, wówczas $n = 2$, co spełnia warunek tezy zadania. Dalej przyjmujemy $d \geqslant 2$. W myśl założenia, istnieją liczby całkowite k, m takie, że

$$(5) \qquad n = kd, \qquad d^2 - 2 = m(n-1) = m(kd-1).$$

Oczywiście $k \geqslant 1$; a skoro $d \geqslant 2$, widać, że także $m \geqslant 1$. Drugi warunek w wierszu (5) mówi, że d jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $x^2 - mkx + (m-2)$. Niech c będzie drugim pierwiastkiem tego trójmianu. Tak więc

$$c + d = mk, \qquad cd = m - 2.$$

Liczba $c = mk - d$ też jest całkowita.

Jeśli $m > 2$, to $c = (m-2)/d > 0$, czyli $c \geqslant 1$, i mamy ciąg zależności

$$0 \leqslant (c-1)(d-1) = cd - (c+d) + 1 = \\ = (m-2) - (mk) + 1 = m(1-k) - 1 \leqslant -1,$$

sprzeczność. Jeśli $m = 1$, wychodzi $cd = -1$, znów sprzeczność (bo $d \geqslant 2$).

Pozostaje przypadek, gdy $m = 2$. Wtedy (wobec (5)) $d^2 - 2kd = 0$, skąd $d = 2k$; zatem liczba $n = kd = 2k^2$ jest podwojonym kwadratem – a o to chodziło.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.