Jak wyznaczyć *najbardziej dowolny* trójkąt?

*Piotr PIKUL**

*Doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

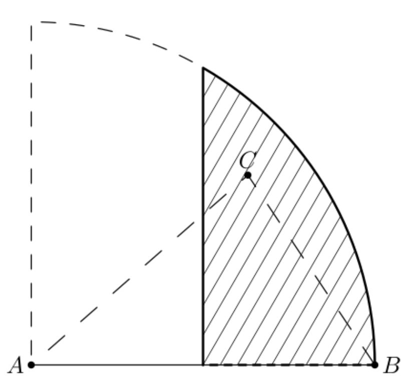
Każda liczba naturalna ma jakąś niezwykłą właściwość. Gdyby tak nie było, istniałaby najmniejsza liczba naturalna nieposiadająca żadnej wyróżniającej jej własności. A to już czyniłoby ją wyjątkową!

To nieco żartobliwe rozumowanie jest pokrewne z problemem, któremu przyjrzymy się w niniejszym artykule. Ze szkolnych lekcji geometrii pamiętam narzekania na rysunki trójkątów. Ktoś rysował „dowolny” trójkąt na tablicy, a potem trzeba było poprawiać, bo wyglądał jak prostokątny. Czasem też bywał za bardzo równoramienny. Zapewne różnie można oceniać zasadność takich narzekań. Można też spróbować nadać im matematyczny sens!

Szukamy trójkąta ostrokątnego, który jest możliwie „najbardziej odległy” od bycia prostokątnym lub równoramiennym. Jest oczywiste, że cecha ta nie powinna zależeć ani od położenia trójkąta na płaszczyźnie, ani od jego wielkości (mówiąc precyzyjnie: trójkąty podobne uznajemy za nierozróżnialne). Można próbować zdefiniować odległość pomiędzy trójkątami w bardzo abstrakcyjny sposób, wybierając najmniejszą „odległość” (np. odległość Hausdorffa lub podobną) pomiędzy reprezentantami klas abstrakcji. Takie podejście może okazać się niewygodne w stosowaniu. Lepiej najpierw nieco „zorganizować” przestrzeń wszystkich trójkątów.

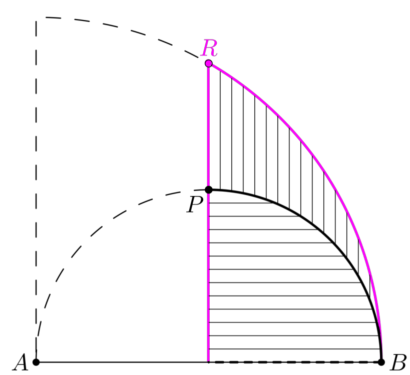
Skoro chcemy być niezależni od podobieństwa, możemy ustalić jeden bok (AB). Możemy się ograniczyć do sytuacji, gdy ten konkretny bok jest najdłuższy. Dalej, korzystając z odpowiednich symetrii osiowych, możemy umieścić trzeci wierzchołek „ponad” podstawą AB i po prawej stronie jej symetralnej (czyli $|AB| \geqslant |AC| \geqslant |BC|$).

Zauważmy, że każdy punkt wewnątrz zakreskowanego obszaru (ograniczonego odcinkiem AB, jego symetralną oraz łukiem okręgu o środku A) odpowiada jednoznacznie trójkątowi, dla którego jest trzecim wierzchołkiem (C). Ponadto, jak już wcześniej wspomnieliśmy, każdy trójkąt ma swojego reprezentanta tej postaci, i to dokładnie jednego. Rysunek 1 przedstawia więc, w pewnym sensie, zbiór wszystkich trójkątów, z dokładnością do podobieństwa.



Rys. 1

To jednak nie koniec, ponieważ możemy zamienić go w prawdziwą mapę zbioru wszystkich trójkątów! Na uzupełnionym rysunku 2 wyróżniono punkty odpowiadające trójkątom prostokątnym (czarny łuk okręgu) oraz równoramiennym (kolorem). Wśród trójkątów równoramiennych wyróżniają się dwa podzbiory: punkty leżące na pionowym odcinku reprezentują trójkąty mające podstawę nie krótszą od ramion, a te leżące na łuku oznaczają, że to ramiona są nie krótsze od podstawy. Na ich przecięciu leży jedyny i niepowtarzalny trójkąt równoboczny. Drugi charakterystyczny trójkąt, prostokątny-równoramienny, leży oczywiście na przecięciu łuku reprezentującego trójkąty prostokątne i odcinka zarezerwowanego dla równoramiennych.



Rys. 2

Znalezienie na „mapie” trzeciego, często wspominanego w geometrii szkolnej, trójkąta „30–60–90” pozostawiam jako proste ćwiczenie pomagające pogłębić zachwyt nad geometrią przestrzeni wszystkich trójkątów.

Czarna, przerywana linia oznacza trójkąty zdegenerowane, którym – tradycyjnie – nie poświęcimy już więcej uwagi. Jak Czytelnicy z pewnością spostrzegli, obszar zakreskowany liniami poziomymi zawiera trójkąty rozwartokątne, a linie pionowe ozdabiają dziedzinę trójkątów ostrokątnych, którymi szczególnie się teraz interesujemy.

Dzięki „mapie” określenie, jak *daleki* jest dany trójkąt od bycia równoramiennym (prostokątnym), stało się precyzyjne. Skoro chcemy wyznaczyć trójkąt, który jest jak najbardziej odległy od równoramiennych i prostokątnych, interesuje nas środek największego okręgu, jaki można zmieścić w zakreskowanym pionowo obszarze (PBR). W ogólności, jeśli boki „trójkąta” nie są odcinkami, taki maksymalny okrąg niekoniecznie jest styczny do każdego z nich. Czytelnik Zaskoczony proszony jest o samodzielne poszukanie przykładu demonstrującego tę patologię. Akurat w naszym przypadku okrąg wpisany (czyli styczny do wszystkich „boków”) jest maksymalny. Czytelnikowi Ambitnemu polecam zastanowienie się, co sprawia, że tak jest, dlaczego okrąg wpisany w krzywoliniowy trójkąt (właściwie: punkt równoodległy od wszystkich „boków”) w ogóle istnieje i jest tylko jeden. W dalszej części po prostu go wskażemy.

W celu wyznaczenia interesującego nas punktu możemy posłużyć się układem współrzędnych. Ustalając $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ oraz szukany punkt jako $C = (d, h)$, nietrudno wyrazić jego odległości od pionowego odcinka i obu łuków (różnicę długości promienia i odległości punktu od środka odpowiedniego okręgu):

$$d_1 = d,$$
$$d_2 = r_{BR} - |AC| = 2 - \sqrt{(d+1)^2 + h^2},$$
$$d_3 = |CO| - r_{BP} = \sqrt{d^2 + h^2} - 1.$$

Przez O oznaczamy tu, tradycyjnie, początek układu współrzędnych. Zakładając, że $d_1 = d_2 = d_3$, możemy wyliczyć rozwiązanie $d = \frac{1}{4}$, $h = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Znając h i twierdzenie Pitagorasa, bez trudu wyznaczymy długość boku BC, wynoszącą $\frac{\sqrt{33}}{4}$. Jeśli więc przemnożymy długości boków przez 4, otrzymamy, że

(werble)

najbardziej dowolnym trójkątem jest ten o proporcjach boków $\mathbf{8 : 7 : \sqrt{33}}$.

Przed przeprowadzeniem wspomnianych obliczeń nigdy o takim trójkącie nie słyszałem, ale to o niczym nie świadczy.

Być może niektórzy Czytelnicy od początku się zastanawiają, dlaczego wcale nie poruszyliśmy kwestii miar kątów. Przecież zarówno *prostokątność,* jak i *równoramienność* można łatwo wyrazić za ich pomocą, a do tego „za darmo” otrzymujemy niezależność od podobieństwa. Teraz wypróbujemy to podejście.

Rozważmy trójkąt o kątach α, β i γ. Ponieważ interesują nas trójkąty ostrokątne, mamy $\alpha, \beta, \gamma < 90°$. Aby trójkąt był *jak najmniej prostokątny*, różnice $90° - \alpha$, $90° - \beta$ oraz $90° - \gamma$ powinny osiągać jak największe wartości. Aby był *jak najmniej równoramienny*, różnice $|\alpha - \beta|$, $|\alpha - \gamma|$ i $|\beta - \gamma|$ powinny osiągać jak największe wartości. Podsumowując, chcemy wyznaczyć takie kąty, żeby wartość
$$\min\{90° - \alpha, 90° - \beta, 90° - \gamma, |\alpha - \beta|, |\alpha - \gamma|, |\beta - \gamma|\}$$
była jak największa.

Ponadto wiemy, że $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, czyli możemy ograniczyć się do dwóch zmiennych. Po podstawieniu nasze wyrażenie uzyskuje postać:
$$F(\alpha, \beta) = \min\bigl\{90° - \alpha,\ 90° - \beta,\ \alpha + \beta - 90°,\ |\alpha - \beta|,\ |2\alpha + \beta - 180°|,\ |\alpha + 2\beta - 180°|\bigr\}.$$

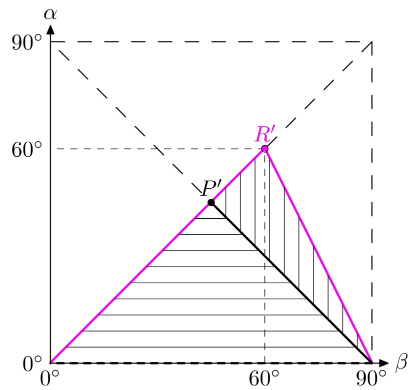
Wartości α i β, dla których osiągana jest największa wartość F, można znaleźć ręcznie, badając układ *kilku* nierówności liniowych i rozpatrując różne przypadki. Można też narysować wykres za pomocą odpowiednio zdolnego oprogramowania.

Niezależnie od preferowanej metody rozwiązanie jest, z dokładnością do permutacji miar kątów, jedno: trójkąt o miarach kątów wewnętrznych 45°, 60° i 75°.

Zauważmy, że możemy rozważyć osobno „odległość od prostokątności” równą $\min\{90° - \alpha,\ 90° - \beta,\ 90° - \gamma\}$ oraz „odległość od równoramienności” równą $\min\{|\alpha - \beta|, |\alpha - \gamma|,\ |\beta - \gamma|\}$. W przypadku przedstawionego rozwiązania obie wielkości osiągają tę samą wartość 15°.

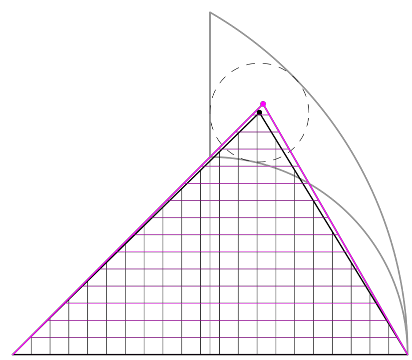
Zwróćmy jeszcze uwagę, że „podejście kątowe” (po uściśleniu $\gamma \geqslant \beta \geqslant \alpha$), generuje alternatywną „mapę” przestrzeni wszystkich trójkątów. I to mapę w kształcie trójkąta!

Na tej „mapie” trójkąty o ustalonej mierze któregoś z kątów są reprezentowane przez proste odcinki. Odróżnia ją to od wersji przedstawionej poprzednio. Jeśli ktoś nabrał przekonania, że w porównaniu z drugą „mapą” ta pierwsza nie ma właściwie nic do zaoferowania, proponuję poszukać sposobu konstruowania trójkąta odpowiadającego danemu punktowi „mapy kątowej”.



Rys. 3

Zostawmy jednak na chwilę „mapy” i wróćmy do trójkąta „45–60–75”. W żadnym razie nie chcę podkopać u Czytelnika wiary w piękno matematyki, ale to *nie* jest ten sam trójkąt co wyznaczony wcześniej. Formalne zweryfikowanie tego faktu jest bardzo proste, w przeciwieństwie do rozpoznania „na oko”, z którym *wyjątkowo niewyjątkowym* trójkątem mamy do czynienia.



Rys. 4. Trójkąty „45–60–75” (kolorem) oraz „$8 : 7 : \sqrt{33}$” (na czarno)

Trójkąt (tj. odpowiadający mu punkt na pierwszej „mapie”) uzyskany drugą metodą leży na przecięciu dwusiecznych kątów krzywoliniowego trójkąta PBR (prostych AP i RB), więc pierwsze podejście również go w pewien sposób wyróżnia. Odrywając się nieco od matematycznych konkretów, możemy powiedzieć, że trójkąt ten, aspirujący do miana *najbardziej dowolnego*, jest niejako pośrednim pomiędzy dwoma *najmniej dowolnymi* – równobocznym i prostokątnym-równoramiennym.

Który spośród wyznaczonych trójkątów jest bardziej dowolny? Zapewne można się spierać. Co więcej, środek okręgu wpisanego w „trójkąty ostrokątne” na drugiej mapie wyznacza trzeciego kandydata do miana *najbardziej dowolnego trójkąta.* Można wskazać zapewne jeszcze całe mnóstwo wyrafinowanych wersji środka dziedziny trójkątów ostrokątnych (por. *Encyclopedia of Triangle Centers*, `faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`). Można też zapytać, czy trójkąt $8 : 7 : \sqrt{33}$ leży w *ciekawym punkcie* drugiej mapy?

Być może jakieś pozamatematyczne badania dotyczące postrzegania kształtów i kątów mogłyby dorzucić do tych rozważań swój wkład, ale na razie wszystko wskazuje na to, że w kwestii wyznaczenia „najbardziej dowolnego trójkąta” panuje pewna dowolność. Chyba trudno wyobrazić sobie lepszą pointę dla tego artykułu.