$3 \leqslant \pi \leqslant 4$

Michał MIŚKIEWICZ

Po powrocie z krainy Oz Dorotka zauważyła u siebie rzadką a przykrą przypadłość – zapomniała twierdzenia Pitagorasa! Innymi słowy, zapomniała, że w rodzinnym Kansas odległość między dwoma punktami $A = (x, y)$, $B = (x', y')$ wyraża się wzorem $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$. Nie byłby to duży powód do niepokoju, gdyby nie to, że Dorotka była gorącą entuzjastką liczby π. Z wielką przykrością stwierdziła, że jej wartości też nie pamięta (nawet w przybliżeniu), a bez twierdzenia Pitagorasa nie była w stanie wyprowadzić jakiegokolwiek wzoru do wyznaczenia π.

Znając twierdzenie Pitagorasa, górną część okręgu jednostkowego można przedstawić jako wykres funkcji $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, a następnie obliczyć jej długość:
$\pi = \int_{-1}^{1} \sqrt{1^2 + (f')^2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Nie wszystko było jednak stracone, bo amnezja nie odebrała Dorotce całej matematycznej wiedzy. Pamiętała operacje dodawania wektorów $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, mnożenia wektorów przez skalary $t(x, y) = (tx, ty)$ oraz pewne własności odległości. Wiedziała mianowicie, że odległość punktów A, B zależy jedynie od wektora $\overrightarrow{AB}$, czyli wyraża się jako $\|A - B\|$, gdzie $P \mapsto \|P\|$ jest pewną funkcją o nieujemnych wartościach. Ponadto znała nierówność trójkąta, czyli

- $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ dla dowolnych punktów A, B,

oraz wiedziała, że na każdej prostej przechodzącej przez $(0, 0)$ odległość zachowuje się jednorodnie:

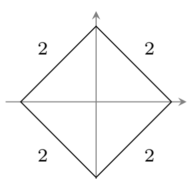
•• $\|tA\| = |t| \cdot \|A\|$ dla dowolnej liczby t i punktu A; ponadto $\|A\| = 0$ jedynie dla punktu $A = (0, 0)$.

Nieujemną funkcję $\|\cdot\|$ spełniającą • i •• zwykło się nazywać normą. W artykule Jarosława Górnickiego (Δ^5_{21}) można było zobaczyć wiele przykładów norm, w tym dwie przedstawione niżej na marginesie.

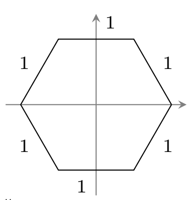
W krainie Oz Dorotka widziała różne dziwy, w tym geometrie wyznaczone przez tzw. normy nieeuklidesowe (jak na rysunkach). Obawiała się, że w takich światach liczba π może być równa $\frac{16}{5}$ – jak w niedalekiej Indianie – albo w ogóle nieznana.

Niesławną ustawę *Indiana Pi Bill* z 1897 r. można rozumieć jako zadekretowanie $\pi = \frac{16}{5}$, chociaż ta historia jest trochę bardziej skomplikowana.

Okazuje się jednak, że z taką wiedzą można już coś konkretnego powiedzieć o liczbie π. Ściślej – da się zdefiniować długość okręgu jednostkowego, a przecież liczbę π określa się jako połowę tej długości!



$\|(x, y)\| = |x| + |y|$



$\|(x, y)\| = \max\left(|x + \frac{y}{\sqrt{3}}|, |x - \frac{y}{\sqrt{3}}|, \frac{2|y|}{\sqrt{3}}\right)$

Przypomnijmy, że przez koło jednostkowe i okrąg jednostkowy rozumiemy zbiory

$$\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leqslant 1\}, \qquad \mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}.$$

Jeśli wielokąt $A_1 A_2 \ldots A_n$ jest wpisany w koło $\mathbb{B}$ – co oznacza, że punkty $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1$ leżą na okręgu $\mathbb{S}$ w tej właśnie kolejności – to jego obwód możemy określić jako

$$\|A_1 - A_2\| + \|A_2 - A_3\| + \ldots + \|A_{n-1} - A_n\| + \|A_n - A_1\|,$$

czyli sumę odległości między kolejnymi wierzchołkami. Następnie jako długość okręgu $\mathbb{S}$ można przyjąć supremum z obwodów wszystkich takich wielokątów; podobnie definiujemy też długość dowolnego łuku.

Gdy $\mathbb{S}$ sam w sobie jest wielokątem, nietrudno jest uzasadnić, że rozważane supremum jest równe obwodowi tego właśnie wielokąta. Na ilustracji obok wyznaczono obwód okręgu jednostkowego dla dwóch przykładowych norm. Trzeba tylko uważać – długości odpowiednich odcinków obliczane są według normy $\|\cdot\|$, a nie przy użyciu twierdzenia Pitagorasa.

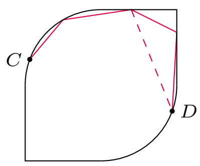
Jak widać, możliwe wartości obwodu koła jednostkowego nie muszą leżeć w okolicach 6,2832. Z drugiej strony, nie mogą też być bardzo daleko od tej liczby – mówi o tym twierdzenie wykazane przez Stanisława Gołąba w 1932 roku.

W skrócie: $3 \leqslant \pi \leqslant 4$.

Twierdzenie. Dla dowolnej normy na płaszczyźnie obwód koła jednostkowego mieści się w przedziale od 6 do 8.

Widzieliśmy już przykłady, że obwód może wynosić właśnie 6 lub 8. Prześledźmy więc razem z Dorotką, dlaczego gorzej być nie może.

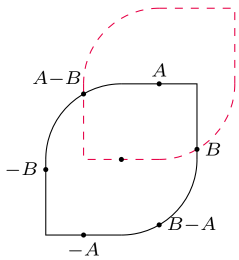
Zanim przejdziemy do dowodu, zauważmy dużo łatwiejsze ograniczenie dolne przez 4. Dowolna średnica CD okręgu jednostkowego $\mathbb{S}$ ma mianowicie długość 2.



Zarys dowodu indukcyjnego, że łamana z C do D ma długość co najmniej $\|C-D\|$

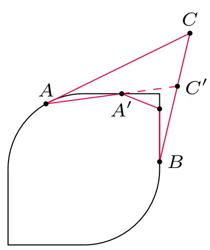
Po wielokrotnym zastosowaniu nierówności trójkąta można wywnioskować, że każda łamana łącząca C i D ma długość nie mniejszą niż $\|C-D\|$, czyli 2. Długość każdego z dwóch łuków łączących C i D jest zdefiniowana jako supremum z długości takich łamanych (z dodatkowym wymaganiem, by punkty łamanej leżały kolejno na okręgu), więc każdy z tych łuków również ma długość 2 lub większą. W konsekwencji okrąg $\mathbb{S}$ ma długość nie mniejszą niż 4.

Po tej prostej obserwacji przejdźmy do ograniczenia przez 6, które nie jest dużo trudniejsze.



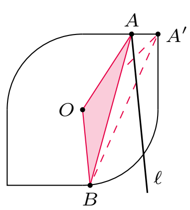
Dowód ograniczenia dolnego. Wybierzmy na okręgu $\mathbb{S}$ dowolny punkt A, a następnie zakreślmy cyrklem okrąg jednostkowy wokół A i wybierzmy B jako jeden z punktów przecięcia (jak na rysunku); w ten sposób zapewniliśmy sobie, że $\|A\| = \|B\| = \|A-B\| = 1$. Podobnie jak w poprzednim rozumowaniu, krótszy łuk AB jest nie krótszy od odcinka AB, czyli ma długość co najmniej 1.

A co zrobić z resztą okręgu? To samo. Zauważmy, że punkty A, B, $B-A$, $-A$, $-B$, $A-B$ tworzą sześciokąt wpisany w S, a każdy z boków ma długość 1. Tak jak wyżej, każdy z sześciu łuków ma długość ograniczoną z dołu przez długość odpowiedniej cięciwy. Długość całego okręgu ograniczyliśmy więc przez 6. □



Zarys dowodu indukcyjnego, że łamana z A do B ma długość najwyżej $\|A-C\| + \|B-C\|$

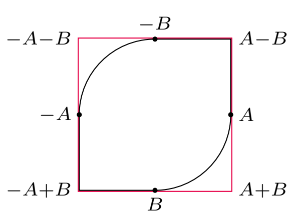
Jak widać, długość łuku jest ograniczona z dołu przez długość odpowiedniej cięciwy, ale jak można ją ograniczyć z góry? Załóżmy, że łuk łączący A i B zawarty jest w trójkącie ABC, przy czym C leży poza kołem jednostkowym $\mathbb{B}$. Dla każdej łamanej przybliżającej łuk AB wielokrotnie użyta nierówność trójkąta pokazuje, że długość łamanej jest nie większa niż $\|A-C\| + \|B-C\|$, czyli suma długości dwóch boków trójkąta. To samo można więc powiedzieć o długości łuku AB.



Koło $\mathbb{B}$ musi leżeć po jednej stronie ℓ

Dowód ograniczenia górnego. Oznaczmy $O = (0,0)$. Wśród wszystkich punktów A, B na okręgu jednostkowym $\mathbb{S}$ wybierzmy takie, dla których pole trójkąta OAB jest największe. Tutaj Czytelnik może zaprotestować – skoro Dorotka zapomniała wzoru na odległość, to tym bardziej wzoru na pole trójkąta. I bardzo słusznie, ale znalazła sposób na obejście tej trudności. O tym później, a najpierw zobaczmy, co da się powiedzieć o takim trójkącie.

Poprowadźmy prostą ℓ równoległą do OB i przechodzącą przez A. Można zauważyć, że całe koło jednostkowe $\mathbb{B}$ leży po jednej stronie prostej ℓ. Istotnie, gdyby punkt $A' \in \mathbb{B}$ leżał po przeciwnej stronie niż O i B, to trójkąt $OA'B$ miałby większe pole niż OAB; da się przy tym dobrać A' na samym okręgu $\mathbb{S}$, co prowadzi do sprzeczności z określeniem A i B.

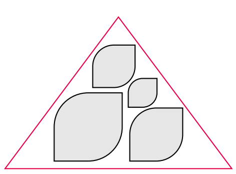


Równoległobok opisany na kole $\mathbb{B}$

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla prostej równoległej do OA i przechodzącej przez B, co prowadzi nas do konkluzji, że całe koło $\mathbb{B}$ leży wewnątrz kąta $\sphericalangle ACB$, gdzie $C = A+B$. Ponieważ odcinek AB jest w całości zawarty w $\mathbb{B}$ (to kolejne zadanie na nierówność trójkąta), krótszy łuk AB mieści się w trójkącie ABC i możemy zastosować wcześniej otrzymane górne ograniczenie – w ten sposób przekonujemy się, że długość łuku AB nie przekracza

$$\|A-C\| + \|B-C\| = \|B\| + \|A\| = 2.$$

Żeby dokończyć rozumowanie, do punktów A i B dołączamy $-A$ i $-B$, a całe koło $\mathbb{B}$ zamykamy w równoległoboku jak na rysunku. W ten sposób podzieliliśmy $\mathbb{S}$ na cztery łuki, z których każdy jest nie dłuższy niż 2, co kończy dowód. □



Przykładowa rodzina rozłącznych kul zawartych w T

Wyjaśnijmy jeszcze sprawę porównywania pól trójkątów. Oczywiście takie wyjaśnienie nie jest konieczne do dowodu twierdzenia – nic nie stoi na przeszkodzie, by używać *standardowego* pojęcia pola w *niestandardowym* świecie – ale jak sobie poradziła Dorotka?

Otóż o polu też można myśleć trochę ogólniej. Przyjmijmy na początek, że pole dowolnego koła o promieniu r jest równe r^2. Następnie mając dany trójkąt T (albo inny kształt) i rodzinę $\mathbb{B}(S_1, r_1), \ldots, \mathbb{B}(S_n, r_n)$ parami rozłącznych kul, intuicyjnie stwierdzilibyśmy, że pole trójkąta jest nie mniejsze od łącznego pola kul, czyli od $r_1^2 + \ldots + r_n^2$. Jednocześnie (znowu – intuicyjnie) trójkąt da się *dowolnie szczelnie* wypełnić kulami, definiujemy więc

$$\text{pole } T := \sup\big\{r_1^2 + \ldots + r_n^2 : \text{ istnieją parami rozłączne kule } \mathbb{B}(S_1, r_1), \ldots, \mathbb{B}(S_n, r_n) \subseteq T\big\}.$$

Tak zdefiniowane pole nosi w literaturze nazwę *zawartości Minkowskiego*. Nie jest to łatwe, ale da się wykazać, że nie zależy od wybranej normy, a więc i od kształtu kul, jakimi wypełniamy T. Ściślej rzecz biorąc, prawie nie zależy – zmiana normy powoduje przemnożenie pól wszystkich figur przez pewną stałą.

Na zakończenie proponuję dwa zadania. Pierwsze daje warunek, którego sprawdzenie przenosi nas w znajome rejony geometrii. Drugie natomiast proponuje dokładniejsze zbadanie nieco zaskakującej rodziny norm.

Zadanie 1. Jeśli kwadrat normy punktu $A = (x, y)$ wyraża się wzorem $\|A\|^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$ dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$, to długość okręgu jednostkowego wynosi 2π.

Zadanie 2. Wyznaczyć długość okręgu jednostkowego dla normy, w której $\mathbb{B}$ jest $2n$-kątem foremnym. Sprawdzić, że długość ta jest mniejsza od 2π dla nieparzystych wartości n, a większa dla parzystych.

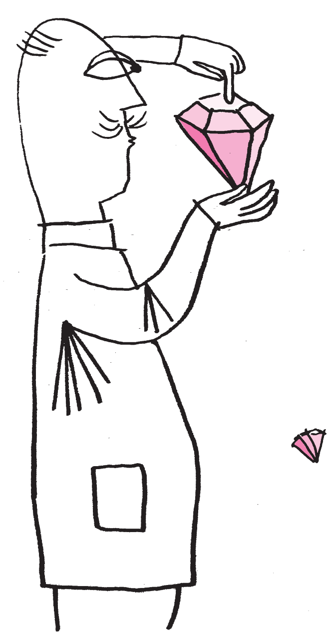
Czy życie musi być oparte na węglu?

*Janusz PĘTKOWSKI**

* Department of Earth, Atmospheric and Planetary Sciences, MIT, Cambridge, USA

Idea życia krzemowego została po raz pierwszy zaproponowana przez niemieckiego astrofizyka Juliusa Scheinera pod koniec XIX wieku.

Możliwość istnienia życia, które wykorzystuje pierwiastki inne niż węgiel jako podstawowy budulec swojej biochemii, urzeka ludzką wyobraźnię od ponad wieku. Stałym rywalem węgla jest krzem. Co jednak mamy na myśli, mówiąc „życie oparte na krzemie”? Najczęściej chodzi o różnorodną chemię krzemoorganiczną, a konkretnie biochemię, w której krzem zastępuje węgiel w cząsteczkach organicznych.



Krzem ma wiele cech wspólnych z węglem i występując pod różnymi postaciami krzemianów w skałach, jest drugim (po tlenie) najbardziej rozpowszechnionym pierwiastkiem w skorupie ziemskiej. Mimo jego obfitości znamy niewiele przykładów zastosowania krzemu przez życie: jest to kwas krzemowy (np. H_4SiO_4) i krzemionka (SiO_2). Aby odpowiedzieć na pytanie, czemu wykorzystanie krzemu jest tak ograniczone, i dowiedzieć się, czy krzem (lub inne pierwiastki) zamiast węgla może być głównym budulcem jakiejś pozaziemskiej biochemii, musimy najpierw zrozumieć, jakie są ogólne wymagania dotyczące chemii życia, niezależnie od jego chemicznej podstawy.

Ogólne wymagania dotyczące chemii życia to kilka cech, które musi spełnić każda biochemia. Zasadnicze są trzy aspekty: wystarczająca różnorodność chemiczna, stabilność i reaktywność oraz obecność rozpuszczalnika. Mimo że różnorodność chemiczna, reaktywność i wymagania dotyczące rozpuszczalników są powiązane, omówimy je oddzielnie poniżej.

Różnorodność chemiczna to wymóg istnienia dostatecznie szerokiego zestawu związków chemicznych zdolnych do pełnienia wielu funkcji biologicznych. Życie na Ziemi robi użytek z aminokwasów (do produkcji białek), cukrów i zasad azotowych (do produkcji kwasów nukleinowych), hydroksy- i ketokwasów (jako podstawowych półproduktów metabolicznych), lipidów (do produkcji błon komórkowych) oraz wielu innych substancji. Tak zróżnicowany zestaw związków chemicznych wymaga zestawu pierwiastków zdolnych do budowania cząsteczek złożonych z wielu atomów, które zapewnią wystarczającą funkcjonalność biologiczną. Wymaganą różnorodność chemiczną można osiągnąć jedynie za pomocą dostatecznie uniwersalnego pierwiastka zdolnego do budowy rusztowania cząsteczki. Takie atomy *pierwiastka rusztowania* muszą się z kolei stabilnie wiązać ze sobą i z atomami innych pierwiastków – z heteroatomami (atomami

Heteroatom to w nomenklaturze chemii organicznej określenie dowolnego atomu, znajdującego się w cząsteczce związku organicznego, który nie jest atomem rusztowania – ani węglem, ani wodorem.