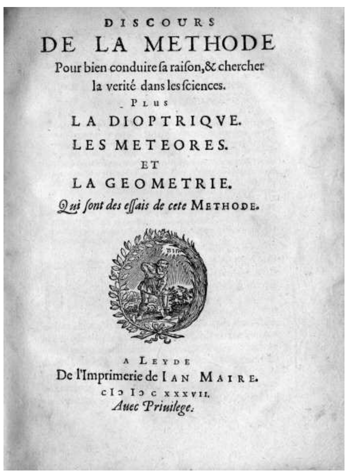
Równania różniczkowe i geometria (I)

*Grzegorz ŁUKASZEWICZ**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

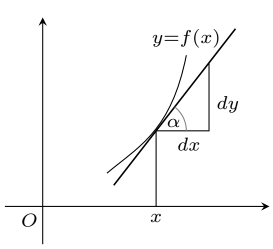
Réne Descartes (1596–1650)



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Strona tytułowa *Rozprawy o metodzie dobrego powodowania swoim rozumem i szukania prawdy w naukach* Kartezjusza; tłumaczenie tytułu: Tadeusz Boy-Żeleński [1918]



Interpretacja dx, dy: para (dx, dy) jest wektorem stycznym do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x, f(x))$.
Pochodna jako tangens kąta α: $dy = f'(x)dx \simeq (y' - y) = f'(x)(x' - x)$ – równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x, f(x))$.

Sformułowana w XVII wieku, za sprawą Kartezjusza i Fermata, geometria analityczna ustanowiła związek geometrii z analizą. Dla przykładu okrąg zdefiniowany jako zbiór punktów na płaszczyźnie jednakowo odległych od danego punktu na tej płaszczyźnie otrzymał teraz – w dodatku do geometrycznej reprezentacji i definicji słownej – reprezentację w postaci równania algebraicznego $x^2 + y^2 = r^2$, gdzie para (x, y) to współrzędne kartezjańskie punktu na okręgu o środku w $(0, 0)$, a r to jego promień. Wydana w 1637 roku *Rozprawa o Metodzie* Kartezjusza była prawdziwym przełomem nie tylko w filozofii, ale także w matematyce. Od tej chwili badano krzywe również metodami analitycznymi.

Następny przełom w matematyce w XVII wieku nastąpił, głównie za sprawą Leibniza i Newtona, wraz z wprowadzeniem rachunku różniczkowego i całkowego. Pozwala on powiązać nie tylko daną krzywą, ale całe rodziny krzywych, z jednym równaniem, tym razem nie algebraicznym, lecz różniczkowym.

Zacznijmy od najprostszego przykładu, gdzie rodzina krzywych to rodzina prostych, które w prostokątnym układzie kartezjańskim są równoległe do osi OX. W opisie Kartezjusza możemy dowolną prostą tej rodziny opisać równaniem

$$y(x) = c, \tag{1}$$

gdzie c jest liczbą rzeczywistą. Chcąc opisać całą rodzinę za pomocą jednego równania, musimy wyeliminować parametr c, mówiący o miejscu przecięcia tej prostej z osią OY. Można to zrobić, biorąc pochodną względem zmiennej x obu stron równania. Otrzymamy wtedy równanie

$$y'(x) = 0 \qquad \text{lub w innym zapisie} \qquad \frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

Pochodzący od Leibniza symboliczny zapis $\frac{dy}{dx} = 0$ jest niezwykle wygodny do badania równań. Nie ma w nim niczego tajemniczego, jeśli się wie, jak go rozumieć w danym kontekście. Symbole dy i dx nazywamy różniczkami, stąd równanie (2) jest *równaniem różniczkowym*, a dokładniej *równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu*. Przejście od równania (2) do równania (1) nazywamy *całkowaniem równania różniczkowego*. Szukane *rozwiązanie ogólne* to cała rodzina prostych, od których wyszliśmy w tym przykładzie.

Rozważmy przykład nieco trudniejszy. Naszą rodziną krzywych jest teraz rodzina okręgów o środku w punkcie $(0, 0)$ na płaszczyźnie i dowolnych promieniach $c > 0$. Wiemy już, że każdą krzywą tej rodziny możemy opisać równaniem

$$x^2 + y^2 = c^2. \tag{3}$$

Spróbujmy ułożyć równanie różniczkowe tej rodziny okręgów. Wyłączając punkty przecięcia okręgów z osią OX, półokręgi powyżej i poniżej tej osi wyrażone są przez pewne funkcje $y = y(x)$, które w tym przykładzie łatwo wyliczyć z równania (3). My jednak postąpimy nieco inaczej. Zapiszmy równanie (3) w postaci

$$x^2 + y(x)^2 = c^2$$

i weźmy pochodną obu stron względem zmiennej x. Otrzymamy

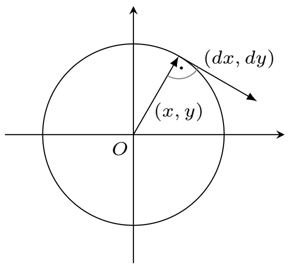
$$2x + 2y(x)y'(x) = 0,$$

zatem ostatecznie

$$y'(x) = -\frac{x}{y} \qquad \text{lub w innym zapisie} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{4}$$

Równanie (4) opisuje rodzinę naszych okręgów, a gdyby się ktoś upierał, że przecież przy jego wyprowadzaniu wyłączyliśmy punkty przecięcia okręgów z osią OX, to tu przychodzi z pomocą genialna symbolika Leibniza. W otoczeniu wyłączonych punktów zapisujemy równanie jako

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}, \tag{5}$$



Iloczyn skalarny wektora (x, y) z wektorem (dx, dy) stycznym do szukanej krzywej jest równy zeru

$(x, y)(dx, dy) = xdx + ydy = 0.$

Szukaną krzywą w przypadku (4) i (5) jest okrąg.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Nie odważam się na dodatkową notatkę o Leibnizu na marginesie, zdając sobie sprawę, że z konieczności każda jej realizacja byłaby równie informatywna jak przybliżenie Wam słonia bezsprzecznie prawdziwym stwierdzeniem, że jest to duże i sympatyczne zwierzę. Odsyłam do literatury na końcu artykułu.

gdzie teraz zmienną zależną jest funkcja $x(y)$. Dla upartych, którzy nie zgadzają się, że równania (4) i (5) to przecież nie jedno równanie, użyjemy trzeciego zapisu:

$$xdx + ydy = 0.$$

Czy patrząc na to równanie, widzicie już jego rozwiązanie ogólne? Co ono oznacza geometrycznie? Prawda, że widać? A teraz scałkujemy je analitycznie. Przyłóżmy do równania znak całki, będący nieco zniekształconą literą „S", oznaczającą sumowanie – oznaczenie wprowadzone przez Leibniza w 1675 roku. Znając własności tej operacji, możemy napisać

$$\int xdx + \int ydy = 0,$$

co daje bezpośrednio

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C = 0.$$

Tutaj C jest dowolną stałą całkowania, a równanie ma rozwiązania dla $C < 0$, stąd możemy podstawić $C = -\frac{1}{2}c^2$ i dostajemy równanie (3).

Ten algorytm działa tylko w dość prostych przypadkach. Rozważmy teraz przypadek jeszcze trudniejszy. Spróbujmy scałkować równanie

(6) $$(xy^2 + x^3 + y - x)dy - (y^3 + x^2y - y - x)dx = 0.$$

Widać, że poprzedniego algorytmu nie da się zastosować bezpośrednio. Co zatem możemy zrobić?

Gdy piszący te słowa poznawał równania różniczkowe po raz pierwszy, z tak zwanych nowoczesnych lub współczesnych podręczników, był mocno rozczarowany. Dawały one wrażenie, że ich struktura podobna jest do struktury książki kucharskiej z przepisami. „Gdy masz to, zrób tak" – zbiór tricków, za pomocą których można było scałkować równania różnych typów. Tricków, ale żadnego ogólnego algorytmu.

Na przykład w przypadku równania (6) należało „zauważyć", że zmieniając zmienne x i y na nowe, r i θ,

(7) $$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

(para (r, θ) to tzw. *współrzędne biegunowe*), możemy wyrazić równanie (6) w nowych zmiennych jako

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2),$$

które całkuje się już bezpośrednio. Znając rozwiązanie $r = r(\theta)$, można, korzystając z równań (7), wyrazić je w zmiennych (x, y), otrzymując tym samym rozwiązanie równania (6). Wszystkie własności rozwiązania można odczytać z jego wyrażenia w zmiennych biegunowych. W formie uwikłanej postaci $F(r, \theta) = c$, którą nazywamy *całką pierwszą równania różniczkowego*, wyraża się ono wzorem

$$\log\left|\frac{1}{r^2} - 1\right| + 2\theta = c.$$

Dodatkowymi rozwiązaniami są $r = 0$ i $r = 1$.

Kilka słów o powyższym „zauważaniu"… Z równania (6) można odgadnąć, że grupa obrotów płaszczyzny wokół początku układu współrzędnych przeprowadza rozwiązania tego równania na rozwiązania tego samego równania. Pomoże nam w tym geometria. Nasze równanie zapisujemy w postaci

$$\frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{r^2 - 1},$$

gdzie $r^2 = x^2 + y^2$. Lewa strona powyższego równania jest tangensem kąta α pomiędzy styczną do krzywej całkowej w punkcie (x, y) a promieniem wodzącym tego punktu wyprowadzonym z początku układu współrzędnych. Oznacza to, że krzywe całkowe tworzą z okręgami $r^2 = x^2 + y^2$ stały kąt, a każdy obrót wokół początku układu współrzędnych przeprowadza krzywe całkowe na krzywe całkowe, stąd też grupa obrotów zachowuje równanie różniczkowe (6). Z równania

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{r^2 - 1}$$

wynika też, że okrąg o promieniu 1 jest krzywą całkową, którą grupa przekształca na ten sam okrąg. Drugim rozwiązaniem o tej własności jest oczywiście początek układu współrzędnych. Widzimy, że działanie grupy obrotów zachowuje wielkość $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, zmienia się tylko kąt obrotu θ. W płaszczyźnie (r, θ) odpowiada to wędrówce po prostych $r = const$, a stąd już wnioskujemy, że podstawienie (7) jest właściwe. Więcej o tym w następnym artykule.

No dobrze, ale „zauważenie" to przecież nie algorytm. Okazuje się, że takie algorytmy istnieją, że były już znane w XIX wieku i widniały w podręcznikach z równań różniczkowych, ale… w pewnym momencie jakby o nich zapomniano, wyrzucając jednocześnie z podręczników. Przypomniano sobie o nich w późnych latach 60. XX wieku, w związku z badaniami ważnych zagadnień nieliniowych, jednocześnie w dobie komputerów, których działanie nie opiera się na „zauważaniu", ale na algorytmach.

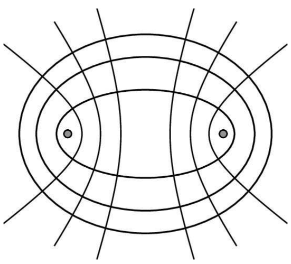
O tym, jak rozwiązać równanie (6), i nie tylko to, korzystając z ogólnej metody, opowiemy w następnym artykule. Jego bohaterem będzie Sophus Lie – bardzo ciekawy gigant matematyczny, którego jedną z naczelnych idei było przeniesienie teorii całkowalności równań algebraicznych, teorii Galois, na równania różniczkowe. Dotyka to najważniejszej ogólnej idei wprowadzonej do matematyki i fizyki w XIX wieku, idei symetrii danego obiektu, w naturalny sposób powiązanej z pojęciami niezmienniczości i grupy – pojęcia te widzimy już u Galois. Idee te pozwoliły powiązać głęboko równania różniczkowe z geometrią i algebrą. Zauważmy, że mamy tu nową jakość. Dołączyła algebra. Jej język połączył teorię całkowalności równań algebraicznych i różniczkowych, wskazując na ciekawe analogie między głównymi twierdzeniami obu teorii.

Sophus Lie (1842–1899)

Wróćmy do naszych elementarnych rozważań. Powyższe powiązania równań różniczkowych z rodzinami krzywych mają proste uogólnienia. Na przykład gdy chcemy znaleźć równanie różniczkowe związane z rodziną parabol

$$y = x^2 + ax + b. \tag{8}$$

Zauważmy, że jest to rodzina dwuparametrowa. Aby pozbyć się parametrów, różniczkujemy dwukrotnie to równanie, dostając $y''(x) = 2$. Całkując to równanie bezpośrednio dwa razy, dostajemy rozwiązanie ogólne w postaci (8). Widzimy, że stopień równania jest związany z liczbą parametrów danej rodziny krzywych.



Rodzina współogniskowych elips i hiperbol

Rozważmy trudniejszy przykład, rodzinę współogniskowych stożkowych daną równaniem

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1,$$

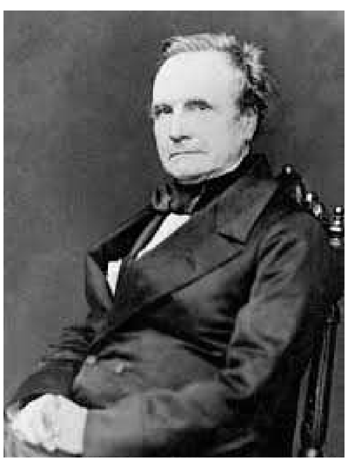
gdzie a i b, $a > b$, są ustalonymi stałymi, λ jest parametrem ($\lambda > -b^2$ to elipsy, $b^2 < -\lambda < a^2$ to hiperbole, wspólne ogniska $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$). Równaniem różniczkowym opisującym tę rodzinę jest równanie

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - a^2 + b^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Proponujemy Czytelnikom udowodnienie powyższego stwierdzenia oraz faktu, że elipsy i hiperbole przecinają się pod kątem prostym.

* * *

Poniżej przedstawię kilka uwag, które nasunęły mi się podczas pisania tego artykułu.



Charles Babbage (1791–1871)

Zachwycałem się notacją Leibniza. Jak ważne jest wybranie dobrej notacji, można zobaczyć, śledząc rozwój rachunku różniczkowego i całkowego. Newton oznaczał pochodną funkcji y przez $\dot{y}$, a Leibniz przez $\frac{dy}{dx}$. Ponieważ na Wyspach Newton był bogiem, którego należało naśladować, jego następcy używający tej notacji spowodowali opóźnienie rozwoju rachunku różniczkowego na Wyspach o całe lata w stosunku do Kontynentu. Z tą sytuacją walczył Charles Babbage – jeden z ojców komputerów. W 1819 roku, jeszcze jako student, wraz z kilkoma kolegami założył on na uniwersytecie w Cambridge *Analitical Society*, towarzystwo promujące rachunek różniczkowy. Jednym z głównych celów tego towarzystwa była walka z „kropkowcami" i krzewienie notacji Leibniza.

Symbolika musi być dobra do rozwiązywania problemów, a sama w sobie nie jest matematyką, lecz tylko symbolicznym zapisem pewnych idei ujętych w relacje pomiędzy danymi obiektami. Fascynujące jest to, że „równania wiedzą więcej od nas", tzn. zawierają nieraz w sobie rzeczy, o których nam się nie śniło, gdy je wypisywaliśmy, ale to już temat na oddzielny artykuł.

Zauważmy na koniec, że notacja Leibniza jest bezpośrednio związana z algorytmem rozwiązania problemu. Leibniz chciał stworzyć język uniwersalny, za pomocą którego dałoby się rozwiązać np. każdy spór. Dany problem należało przełożyć na ten język, zastosować odpowiedni algorytm i otrzymać wynik. Wiadomo, że tak ogólne wizje nie mają widocznych realizacji i… ludzie dalej się kłócą, kto ma rację w danej sprawie.

Literatura:

M. R. Antognazza, *Leibniz. Biografia intelektualna*, Kraków: Copernicus Center Press, 2018.

Ch. Babbage, *Passages from the Life of a Philosopher*, London, Longman 1864.

J. Mazur, *Enlightening Symbols. A Short Story of Mathematical Notation and Its Hidden Powers*, Princeton University Press, 2014.