# Niniejszy tytuł orzeka o samym sobie

*Jędrzej KOŁODZIEJSKI**

*Doktorant, Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Większość z nas zna zapewne bajkową postać Pinokia – ożywionego za sprawą magii drewnianego chłopca, którego nos rósł wtedy i tylko wtedy, gdy ten kłamał. Czy jednak zadaliśmy sobie kiedyś pytanie, co by się stało, gdyby Pinokio powiedział „mój nos teraz urośnie”? Jeśli jego nos zacząłby rosnąć, to znaczyłoby, że wypowiedź była prawdziwa – ale w takim wypadku nos nie powinien rosnąć. Jeśli jednak nos by nie urósł, słowa Pinokia byłyby fałszywe – czyli jednak powinien rosnąć. Sprzeczność! Antynomia ta stanowi jedno z wielu wcieleń słynnego *paradoksu kłamcy* sformułowanego w antycznej Grecji przez Eubulidesa. Paradoks dotyczy prawdziwości następującego *zdania kłamcy*:

*To zdanie jest fałszywe.*

Chwila zastanowienia pokazuje, że z prawdziwości powyższego zdania wynika jego fałszywość, a z fałszywości prawdziwość – nie może być zatem ani prawdziwe, ani fałszywe! Co z tym fantem zrobić? Tym, co na pierwszy rzut oka odróżnia zdanie kłamcy od „porządnych” zdań, jest samoodnośność. Zamiast bowiem mówić o stołach czy liczbach naturalnych – jak to zdania mają w zwyczaju – orzeka ono coś o sobie samym. Wydaje się, że to właśnie ta cecha stanowi źródło sprzeczności. Czy siedzącą na ławie oskarżonych samoodnośność uznamy zatem za winną? Jak się przekonamy, sprawa nie jest tak prosta, jak mogłoby się wydawać.

**Rozwiązanie zadania M 1673.**
Można. Każdą liczbę całkowitą dodatnią można zapisać jako $2^A B$, gdzie $A \geqslant 0$ i $B$ jest liczbą nieparzystą.
Liczby postaci $2^a(4b+1)$ pokolorujmy na biało, a liczby postaci $2^a(4b+3)$ pokolorujmy na czerwono ($a, b \geqslant 0$).
Pokażemy, że suma dwóch liczb białych nie jest potęgą dwójki (rozumowanie w przypadku liczb czerwonych jest analogiczne).
Weźmy dwie różne liczby białe: $2^s(4k+1)$ i $2^t(4\ell+1)$, gdzie $k, \ell \geqslant 0$, $s \geqslant t \geqslant 0$, i załóżmy, że ich suma jest potęgą dwójki. Jeśli $s > t$, to

$$2^s(4k+1) + 2^t(4\ell+1) = \\ = 2^t(2^{s-t}(4k+1) + 4\ell + 1).$$

Liczba $2^{s-t}(4k+1) + 4\ell + 1 \geqslant 3$ jest nieparzysta, więc nie może być potęgą dwójki. Wobec tego $s = t$.
Jednakże wtedy

$$2^s(4k+1) + 2^s(4\ell+1) = 2^{s+1}(2(k+\ell)+1).$$

Gdyby $k > \ell$, to $2(k+\ell)+1 \geqslant 3$ jest znów nieparzysta, więc nie może być potęgą dwójki. Zatem $k = \ell$, czyli wybrane liczby białe są równe – sprzeczność.

## Samoodnośne wyrażenia są wśród nas

Zacznijmy od tego, że samoodnośność występuje w językach naturalnych – takich jak język polski – i ma się tam wcale dobrze. W polszczyźnie mamy wręcz specjalne słowo – „niniejszy” – służące do konstrukcji samoodnośnych wyrażeń. Nie wydaje się kontrowersyjne ani podejrzane stwierdzenie, że niniejszy artykuł napisany jest w języku polskim, lub że niniejsze zdanie jest szesnastym zdaniem tego artykułu (nie licząc tytułów ani wykrzykników).

W języku mamy do czynienia z rozmaitymi rodzajami definicji. Możemy definiować daną rzecz przez wyliczenie jej istotnych cech – takich jak np. posiadanie blatu i nóg przez stół. Inną formą definicji, nazywaną definicją *ostensywną*, jest bezpośrednie wskazanie egzemplarza rozważanej rzeczy – np. stołu. Zdanie:

*To jest definicja ostensywna.*

jest zatem definicją ostensywną definicji ostensywnej!

Obecność samoodnośnych wyrażeń w języku naturalnym nie oznacza oczywiście, że musimy je akceptować w ścisłych i precyzyjnych teoriach formalnych. Jak się jednak okazuje, czasem nawet największa ostrożność i rygor nie uchronią nas przed samoodnośnością.

Wybierzmy matematyczną strukturę, o której będziemy mówić – dla ustalenia uwagi skupimy się na liczbach naturalnych $\mathbb{N}$ z operacjami dodawania $+$ i mnożenia $\times$, jednak równie dobrze moglibyśmy mówić na przykład o zbiorach lub zbiorach skończonych. Dla struktury takiej możemy (choć nie zrobimy tego w niniejszym artykule) bardzo precyzyjnie zdefiniować, czym są poprawnie zbudowane formuły logiczne, i określić znaczenie każdej takiej formuły.
Za pomocą różnych formuł możemy wyrażać różne stwierdzenia – na przykład formuła $\mathsf{Parzyste}(x) =$ „$\exists y(y+y=x)$” mówi, że liczba $x$ jest parzysta, zaś $\mathsf{Przemienność} =$ „$\forall x(\forall y(x \times y = y \times x))$” wyraża znaną nam ze szkoły przemienność mnożenia liczb naturalnych. Formuły, które *po prostu* coś konstatują (takie jak $\mathsf{Przemienność}$), nie zaś orzekają *o jakiejś zmiennej* (jak to robi $\mathsf{Parzyste}(x)$ o $x$-ie, które jest prawdziwe o liczbie 2, a fałszywe o liczbie 3), nazwiemy zdaniami. Ponieważ formuły logiczne są skończonymi napisami, możemy ponumerować je wszystkie – każdemu $\varphi$ przypisując unikatowy numer $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że pozwala nam to interpretować formuły mówiące o liczbach jako mówiące o kodach formuł – czyli pośrednio o samych formułach. Jak pokazał Rudolf Carnap, jeśli tylko sposób, w jaki numerujemy formuły, ma kilka naturalnych własności, to umożliwia on formułom mówienie *o samych sobie*:

„$\exists x(\ldots)$” to skrót dla „istnieje $x$ takie że...”, zaś „$\forall x(\ldots)$” – „dla każdego $x$ ...”.

Numerowanie formuł możemy na przykład otrzymać, porządkując wszystkie formuły leksykograficznie i $n$-tej formule przypisując numer $n$. Alternatywnie, utożsamiając liczby z ich zapisami binarnymi, otrzymujemy bijekcję liczb z (rozpoczynającymi się od jedynki) ciągami zer i jedynek.

**Lemat przekątniowy.** *Dla każdej formuły $\varphi(x)$ skonstruować można zdanie $\psi$ takie, że:*

$$\psi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \varphi(\ulcorner\psi\urcorner).$$

Zdanie $\psi$ mówi zatem dokładnie tyle, że liczba $\ulcorner\psi\urcorner$ będąca jego własnym numerem ma własność $\varphi$.

Aby zilustrować znaczenie lematu, rozważmy inny paradoks – nazwiemy go paradoksem Gödla – związany z następującym *zdaniem Gödla*:

*Tego zdania nie da się udowodnić.*

Czy zdanie Gödla może być fałszywe? Gdyby tak było, fałszem byłoby to, co głosi – a więc zdanie Gödla miałoby dowód. To jednak niemożliwe, nie da się bowiem udowodnić zdania fałszywego. Zatem zdanie Gödla jest prawdziwe – ale to z kolei oznacza, że nie ma dowodu. Mamy zatem przykład zdania prawdziwego, ale niedowodliwego! Dzięki lematowi przekątniowemu ten wyrażony w języku naturalnym paradoks daje się przekuć w ścisły dowód słynnego twierdzenia Gödla:

**Twierdzenie 1** (Gödel)**.** *Dla każdego (rozsądnego) systemu aksjomatów $A$ istnieje zdanie prawdziwe, ale niedające się z $A$ udowodnić.*

Istotnie, rozważmy następującą własność liczb: „liczba $x$ jest numerem zdania niemającego dowodu w oparciu o aksjomaty $A$". Okazuje się, że jeśli tylko $A$ da się sensownie reprezentować, to istnieje formuła $\varphi_A(x)$ wyrażająca powyższą własność. Z lematu przekątniowego otrzymujemy wtedy zdanie $\psi$ mówiące, że $\ulcorner\psi\urcorner$ jest numerem zdania niemającego dowodu w oparciu o aksjomaty $A$. Zdanie $\psi$ orzeka więc *o samym sobie*, że nie ma dowodu w oparciu o aksjomaty $A$. Argument analogiczny do użytego przy (nieformalnym) zdaniu Gödla świadczy o tym, że jeśli tylko z $A$ nie da się udowodnić nic *fałszywego*, to są również pewne *prawdziwe* stwierdzenia, których zeń nie dowiedziemy.

## Alibi

No dobrze, widzimy zatem, że samoodnośność występuje „w przyrodzie" i że często, mimo wielkiej ostrożności, nie da się jej uniknąć nawet w systemach formalnych. Ważniejsze jednak jest pytanie, czy to faktycznie ona odpowiada za antynomie. Jak się okazuje, samoodnośność ma alibi: paradoksy podobne do paradoksu kłamcy mogą wystąpić również bez niej. Rozważmy następujące dwa zdania:

*Następne zdanie jest prawdziwe.*

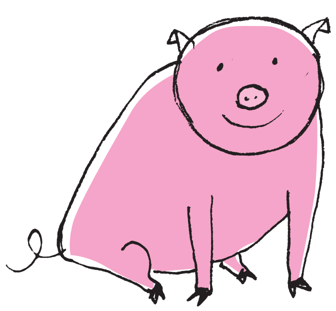
*Poprzednie zdanie jest fałszywe.*

Analiza podobna do paradoksu kłamcy prowadzi do stwierdzenia, że żadne ze zdań nie może być ani prawdziwe, ani fałszywe. Z drugiej strony nietrudno dostrzec, że zdania te – choć żadne z nich nie mówi bezpośrednio o sobie, odnoszą się do siebie pośrednio, poprzez cykliczne powiązanie (Czytelnik może zechcieć zapisać cykl $n$ zdań tworzących razem paradoks). Kolejny przykład pozbawiony jest już jakiejkolwiek autoreferencji – również pośredniej.

Tym razem rozważmy *nieskończony* ciąg zdań, z których każde mówi, że wszystkie kolejne są fałszywe:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \quad \textit{Dla każdego } i > 1 \textit{ zdanie } \varphi_i \textit{ jest fałszywe.}\\
\varphi_2 &= \quad \textit{Dla każdego } i > 2 \textit{ zdanie } \varphi_i \textit{ jest fałszywe.}\\
&\vdots\\
\varphi_j &= \quad \textit{Dla każdego } i > j \textit{ zdanie } \varphi_i \textit{ jest fałszywe.}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zastanówmy się, czy dla jakiegokolwiek $j$ prawdziwe jest $\varphi_j$. Gdyby tak było, znaczyłoby to, że wszystkie dalsze zdania – a więc w szczególności $\varphi_{j+1}$ – są fałszywe. Skoro jednak $\varphi_{j+1}$ mówi, że wszystkie następujące po nim zdania są fałszywe – to fałszywość $\varphi_{j+1}$ oznacza, że dla pewnego $i > j+1$ zdanie $\varphi_i$ jest prawdziwe, co przeczy $\varphi_j$. Wszystkie zdania w ciągu muszą więc być fałszywe. Ale skoro tak, to prawdą jest to, co głosi każde ze zdań – sprzeczność! Powyższy paradoks – sformułowany po raz pierwszy przez Stephena Yablo – pokazuje, że na trudności takie jak paradoks kłamcy natrafiamy nawet bez cyklicznego odnoszenia się do siebie zdań. Samoodnośność ma alibi – to nie ona jest winna sprzeczności.



*Odpowiedź do zadania 1 z artykułu „O metrykach i kulach".* Norma

$$\|(x,y)\| = \max\{\max\{|x|,|y|\}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}(|x|+|y|)\}$$

ścina wierzchołki kwadratu jednostkowego w normie $\|\cdot\|_\infty$ z przykładu 4. Inny ośmiokąt otrzymamy, biorąc normę

$$\|(x,y)\| = \max\{|x|+(\sqrt{2}-1)|y|, (\sqrt{2}-1)|x|+|y|\}.$$

## Na tropie sprzeczności

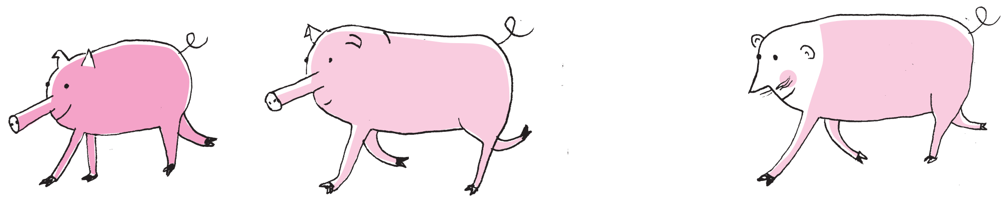
Skoro samoodnośność została oczyszczona z zarzutów, pozostajemy z pytaniem: kto zatem jest winny? Pewien trop pojawił się już w tym artykule. Być może zobaczywszy lemat przekątniowy i to, jak pozwala on sformalizować paradoks Gödla, Czytelnik zadaje sobie pytanie, jak w tym kontekście prezentuje się bardziej przecież złowieszczy paradoks kłamcy. Czyżby arytmetyka była sprzeczna? Rozważmy bowiem następującą własność liczb: „liczba $x$ jest kodem zdania *prawdziwego*". Czy istnieje formuła wyrażająca powyższą własność? Gdyby tak było, moglibyśmy zdefiniować również paradoksalną własność „liczba $x$ jest kodem formuły *fałszywej*". Stosując lemat przekątniowy do wyrażającej ją hipotetycznej formuły $\varphi(x)$, otrzymalibyśmy zdanie $\psi$ mówiące o sobie, że jest fałszywe. Wiemy już jednak, że takie paradoksalne zdanie prowadzi do sprzeczności. Jeśli więc wierzymy, że arytmetyka sprzeczna nie jest, to płynącym stąd wnioskiem jest twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy:

**Twierdzenie 2** (Tarski)**.** *Nie istnieje formuła $\varphi(x)$ wyrażająca prawdziwość, tj. taka, że: $\varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $x$ jest kodem formuły prawdziwej.*

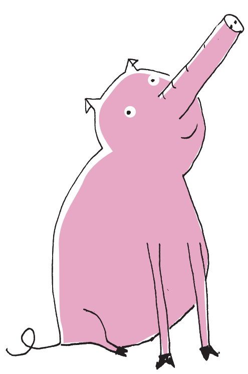
Nie znaczy to, że nie da się ściśle opisać prawdy i fałszu dla formuł określonego systemu formalnego (w naszym przykładzie – arytmetyki liczb naturalnych).

Opis taki wymaga jednak wyjścia poza sam ten system i przyjęcia *zewnętrznej perspektywy.*

Niczym w dobrym kryminale, godnym Herkulesa Poirot czy Sherlocka Holmesa, ostateczny werdykt jest więc zupełnie inny, niż wydawało się na początku. To nie samoodnośność, ale lekkomyślnie nadużywane pojęcie prawdy, choć z pozoru tak niewinne, odpowiada za sprzeczności! Dodajmy na koniec, że twierdzenie Tarskiego mówi tylko o prawdziwości na gruncie sformalizowanych, matematycznych systemów – takich jak arytmetyka liczb naturalnych. Pojęcie prawdziwości w językach naturalnych – takich jak język polski – znajduje się poza jurysdykcją formalnych wnioskowań i tu, otoczona hordami paradoksów, sprzeczność może pozostać bezkarna.



# Zadania



*Przygotował Dominik BUREK*

**M 1672.** Dane są funkcje kwadratowe $f$, $g$, $h$, które nie mają pierwiastków rzeczywistych, a ich współczynniki przy $x^2$ są równe. Załóżmy, że współczynniki tych funkcji przy $x$ są parami różne. Udowodnij, że istnieje liczba rzeczywista $c$, dla której równania $f(x) + cg(x) = 0$ oraz $f(x) + ch(x) = 0$ mają wspólne rozwiązanie.
Rozwiązanie na str. 4

**M 1673.** Czy można pokolorować wszystkie liczby całkowite dodatnie, używając dwóch kolorów tak, aby suma dwóch różnych liczb tego samego koloru nie była potęgą dwójki?
Rozwiązanie na str. 1

**M 1674.** Danych jest 25 różnych punktów na płaszczyźnie. Niech $D$ będzie największą z odległości między tymi punktami, a $d$ najmniejszą z nich. Udowodnij, że $D > 2d$.
Rozwiązanie na str. 7

*Przygotował Andrzej MAJHOFER*

**F 1023.** W litrowej butelce ($V_0 = 10^{-3}$ m$^3$) pozostała bardzo niewielka ilość wody przylegającej do dna i ścianek butelki. Butelkę szczelnie zamknięto, a następnie ogrzano do temperatury 100°C. Jakie maksymalne ciśnienie wewnątrz butelki można w ten sposób osiągnąć? Jaka minimalna ilość wody musi pozostać w butelce, żeby to ciśnienie mogło być osiągnięte? Początkowa temperatura butelki z wodą wynosi $t_0 = 20$°C, ciśnienie powietrza w pomieszczeniu równe jest standardowemu ciśnieniu atmosferycznemu, $p_0 \approx 10^5$ Pa, a stała gazowa $R \approx 8{,}314$ J/(mol·K). Można założyć, że w momencie zamykania butelki, poza resztką wody, znajdowało się w niej tylko suche powietrze.
Rozwiązanie na str. 7

**F 1024.** W procesie przewodzenia ciepła strumień $j$ przenoszonej energii (ciepła) jest proporcjonalny do szybkości zmian temperatury z odległością

$$j = -\lambda \frac{dT}{dr},$$

gdzie $T$ oznacza temperaturę, a $r$ współrzędną w kierunku najszybszego spadku temperatury (minus oznacza przepływ w kierunku malenia temperatury). Stalową kulkę o promieniu $R = 2{,}5$ cm i temperaturze początkowej 20°C wrzucono do wrzątku (100°C). Oszacuj, po jakim czasie $\tau$ zanurzenia we wrzątku kulka osiągnie temperaturę 100°C? Dane dla stali: ciepło właściwe $c \approx 0{,}47$ J/(g·K), współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda \approx 20$ W/(K·m), a gęstość $\rho \approx 8$ g/cm$^3$.
Rozwiązanie na str. 6

Wyjaśnienie: *Strumień energii* to ilość energii przepływającej w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni.