Jak oszacować średnią liczbę „skondensowanych” atomów $\bar{N}_0$, tzn. tych (prawie) nieporuszających się, o energii równej 0? Odwołując się do założenia Boltzmanna, otrzymujemy wzór

$$(*) \qquad N_0(\bar{N}, E) = \frac{1}{\Gamma(N,E)} \sum_{n=1}^{N} (N-n)\, p_n(E),$$

gdzie z kolei pojawia się symbol $p_n(E)$, czyli wspomniana na początku liczba podziałów E na sumę dokładnie n liczb! Indeks n w powyższym wzorze ma interpretację liczby cząstek niebędących na poziomie $E = 0$, natomiast $\Gamma(N,E) = \sum_{n=1}^{N} p_n(E)$ to liczba wszystkich mikrostanów N cząstek o energii całkowitej E. Zatem ułamek $p_n(E)/\Gamma(N,E)$ to liczba tych mikrostanów, dla których na poziomie 0 jest $N-n$ atomów. Dla przykładu powyżej z $N = 4$ i $E = 5$ mamy $\bar{N}_0 = \frac{3}{2}$.

Posługując się wzorem $(*)$, można numerycznie zbadać przypadek jednowymiarowy i stwierdzić, że w jednym wymiarze nie ma przejścia fazowego, od fazy „prawie wszystkie cząstki są ruchome” do tzw. kondensatu Bosego–Einsteina, kiedy „prawie wszystkie cząstki są nieruchome”.

A jak jest w trzech wymiarach, gdy atomy są utrzymywane w pułapce opisywanej potencjałem o kształcie paraboloidy będącej wykresem funkcji $\frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)$? To bardziej typowy przypadek w doświadczeniach nad statystyką gazów niż przypadek jednowymiarowy. Okazuje się, że spektrum nie zmienia się w tym przypadku, ale pojawiają się *degeneracje*, tzn. cząstka może mieć energię ϵ_n na więcej niż jeden sposób. Dla przykładu pojedyncza cząstka energię n może osiągnąć, będąc w stanie n w kierunku X i 0 w pozostałych lub np. będąc na poziomach 1, 1 w kierunkach X i Y i na poziomie $n-2$ w kierunku Z.

W przypadku układu $N = 2$ cząstek o energii całkowitej $E = 2$ mamy 15 mikrostanów.

W przypadku potencjału harmonicznego stopień degeneracji n-tej energii wynosi $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Pozostałe wzory, na entropię, temperaturę i średnie obsadzenie poziomu $E = 0$, pozostają bez zmian.

Obliczenie statystyki liczby nieruchomych cząstek w trzech wymiarach okazuje się trudne. Najlepsze algorytmy radzą sobie do maksymalnie $N = 100\,000$ cząstek (na klastrach obliczeniowych, po wielomiesięcznych obliczeniach), ale jest to zbyt mało, aby porównać się z doświadczeniami poświęconymi tej tematyce, a analitycznych szacowań brak. Ten otwarty problem fizyczno-matematyczny pozostawiamy więc Czytelnikom.

Zadania

Przygotował Jarosław GÓRNICKI

$$e \approx \sqrt{\sqrt{\left(\frac{(4!!)!+4}{(4!!)!}\right)^{(4!!)!}}},$$

$$\pi \approx \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(4!!)!}-[-\sqrt{4!}\,]}}}}}}\cdot\frac{4!}{4!!},$$

$$\gamma \approx \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(-[-\sqrt{4!}\,])\cdot 4!}}}}}}-\frac{\sqrt{4}}{4}.$$

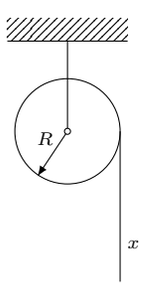
Problem czterech czwórek pojawił się 30 grudnia 1881 roku w londyńskim tygodniku *Knowledge* (zadanie 1669). Cztery czwórki są dobre na wszystko (margines). Liczba π też chce zabłysnąć (zadanie 1670). Oczywiście im mniej symboli π, tym lepiej, np. zapis $2 = -[-\sqrt{\pi}]$ jest lepszy niż $2 = [\sqrt{\pi}] + [\sqrt{\pi}]$. Mniej czwórek też daje radę (zadanie 1671). Rywalizacja trwa.

M 1669. *Każdą liczbę naturalną od* 1 *do* 20 *zapisać za pomocą czterech czwórek, korzystając z operacji* $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\sqrt{\cdot}$.
Rozwiązanie na str. 11

M 1670. *Każdą liczbę naturalną od* 1 *do* 20 *zapisać jedynie za pomocą nie więcej niż trzech liczb* π, *korzystając z operacji* $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\sqrt{\cdot}$, $[\cdot]$, !, !!.
Rozwiązanie na str. 13

M 1671. *Każdą liczbę naturalną od* 1 *do* 20 *zapisać jedynie za pomocą nie więcej niż dwóch czwórek, korzystając z operacji* $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\sqrt{\cdot}$, $[\cdot]$, !, !!.
Rozwiązanie na str. 18

Przygotował Andrzej MAJHOFER



F 1021. Na jednorodny, poziomy walec o promieniu R i masie M nawinięto pojedynczą warstwę jednorodnej, cienkiej linki o całkowitej długości l i masie m. Walec może obracać się bez tarcia wokół swojej osi symetrii. Odcinek linki o długości x zwisa (rysunek) w polu grawitacyjnym, powodując obrót walca. Ile wynosi przyspieszenie, z jakim opada koniec linki, w zależności od długości odcinka x? Moment bezwładności jednorodnego walca o masie M i promieniu R dla obrotu wokół jego osi symetrii wynosi $MR^2/2$. Przyspieszenie ziemskie wynosi g. Linka nie ślizga się po powierzchni walca.
Rozwiązanie na str. 1

F 1022. W warunkach normalnych ($p = 101325$ Pa, $T = 273{,}15$ K) gęstość mieszaniny azotu i helu wynosi $\rho = 0{,}6$ g/l. Ile moli helu zawarte jest w 1 litrze tej mieszaniny? Masa atomowa azotu $\mu_N \approx 14$ g/mol, a helu $\mu_{He} \approx 4$ g/mol. Stała gazowa $R \approx 8{,}314$ J/(mol·K).
Rozwiązanie na str. 9