O pewnej metodzie rozwiązywania równań „nierozwiązywalnych”

*Karol GRYSZKA**

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Matematyka pełna jest niezwykłych równości. Wśród nich są takie, w których występują ulubione stałe matematyczne, jak choćby

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots, \qquad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

czy miłe dla oka:

$$3 + \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{3}{2}, \qquad 12^2 = 144 \text{ oraz } 441 = 21^2, \qquad 2^5 \cdot 9^2 = 2592.$$

My jednak przyjrzyjmy się bliżej równości $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$. Jest ona szczególnym przypadkiem równania

$$x^x = y^y. \tag{1}$$

Jak znaleźć rozwiązania $x^x = y^y$? Czy takie równanie ma więcej rozwiązań niż $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$? Można szukać metodą prób i błędów, ale to najprawdopodobniej doprowadzi donikąd. Możemy zdradzić, że

$$x = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

jest kolejnym rozwiązaniem równania (1). Spróbujmy znaleźć więcej rozwiązań. A priori nie wiadomo, czy to równanie ma więcej niż dwa rozwiązania… Jak się jednak zaraz przekonamy, jeśli

$$\begin{cases} x = t^{\frac{t}{1-t}}, \\ y = t^{\frac{1}{1-t}}, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $t > 0$, to para (x, y) jest rozwiązaniem (1). Zauważmy, że jeśli przyjmiemy $t = 2$, otrzymamy pierwsze, a dla $t = 3$ drugie z powyższych rozwiązań. Rozwiązanie (2) można uzyskać przez podstawienie $y = tx$ w (1) (patrz margines).

Podstawiając $y = tx$ w (1), otrzymujemy

$$(x^x)^{\frac{1}{x}} = ((tx)^{tx})^{\frac{1}{x}},$$

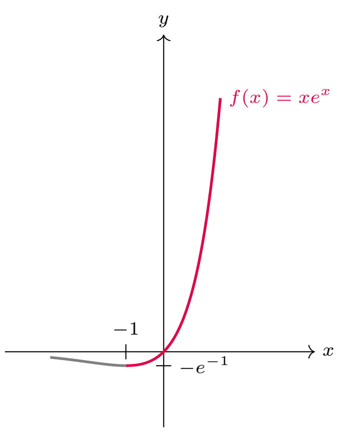
co można uprościć do $x = t^{\frac{t}{1-t}}$. Z relacji $y = tx$ otrzymujemy wzór na y:

$$y = tx = tt^{\frac{t}{1-t}} = t^{1+\frac{t}{1-t}} = t^{\frac{1}{1-t}}.$$

Z takiej postaci rozwiązania wynika ciekawa własność, otóż

$$y = tx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y}{t} = x = y^t,$$

czyli $y = ty^t$. Ta równość ma pewien związek z funkcją $f(x) = xe^x$, która jest określona na zbiorze liczb rzeczywistych. Nas jednak będzie interesować ta część dziedziny funkcji f, na której jest ona odwracalna. Weźmy przedział $[-1, +\infty)$, a zbiorem wartości jest wtedy $[-1/e, +\infty)$. Wykres tej funkcji przedstawiony jest na marginesie.



Wykres funkcji f. Na szaro zaznaczony jest fragment, który usuwamy z dziedziny funkcji tak, aby pozostała (kolorowa) część była odwracalna

Funkcją odwrotną do f jest… no właśnie, co to takiego? Rozważając równość

$$y = xe^x$$

i traktując x jak niewiadomą, powinniśmy wyznaczyć funkcję odwrotną do f. Jednak próby wykonania tego zadania „na piechotę” spełzną na niczym. Z drugiej strony ograniczenie dziedziny **gwarantuje** istnienie funkcji odwrotnej – nazywamy ją funkcją W Lamberta i oznaczamy również przez W. Definiujemy ją po prostu jako funkcję odwrotną do $f(x) = xe^x$. I zgodnie z tą definicją zachodzi $W(x) = y \iff x = ye^y$. Ponieważ W oraz f są funkcjami odwrotnymi, to zachodzi

O funkcji W Lamberta można przeczytać na przykład w Δ^6_{14}.

$$W(f(x)) = x, \qquad f(W(x)) = x,$$

czyli

$$W(xe^x) = x, \qquad W(x)e^{W(x)} = x. \tag{3}$$

Oczywiście jest to prawda wszędzie tam, gdzie te funkcje zostały poprawnie określone – dla f na zbiorze $[-1, +\infty)$ oraz dla W na zbiorze $[-1/e, +\infty)$.

Funkcja W w równaniu (1). Logarytmując obie strony równania (1), otrzymujemy $x \ln x = y \ln y$. Korzystając z (3), dostajemy:

$$\begin{aligned} x \ln x &= \ln y \cdot e^{\ln y}, \\ W(x \ln x) &= W(\ln y \cdot e^{\ln y}), \\ \ln y &= W(x \ln x), \\ y &= e^{W(x \ln x)}. \qquad (4) \end{aligned}$$

Wynika z tego, że jeśli dane jest x, to y musi być postaci (4). Rozwiązanie jest bardzo eleganckie i zgrabne, ale... chwila uwagi i spostrzeżemy, że powyższe do niczego nie prowadzi. Spójrzmy na proste przekształcenie (zgodne ze wzorem (3)):

$$W(x \ln x) = W(\ln x \cdot e^{\ln x}) = \ln x,$$

czyli otrzymaliśmy $y = e^{\ln x} = x$. Czy więc wzór (4) pozbawiony jest sensu?

Zwróćmy uwagę na to, że otrzymana przed chwilą równość ma miejsce wtedy, gdy $x \ln x \geqslant -1$, czyli $x \geqslant e^{-1}$ (zgodnie z podanymi dziedzinami funkcji W oraz f). Wykonajmy zatem mały eksperyment – skorzystajmy z programu `WolframAlpha` i obliczmy $e^{W(0{,}1 \ln 0{,}1)}$. Innymi słowy, podstawiamy $x = 0{,}1$. Wynikiem jest $y = 0{,}729241\ldots$, a nie $y = 0{,}1$! Cóż tutaj się stało? Zauważmy, że $x < \frac{1}{e}$, a więc $\ln x$ jest poza wyróżnioną dziedziną funkcji f! Niemniej liczba $f(x) = x \ln x$ jest już większa od $-\frac{1}{e}$, a zatem trafia w wyróżnioną dziedzinę funkcji W. Złożenie $W(f(x))$ prowadzi nas wtedy do przedziału $(-1, \infty)$, wobec tego z konieczności wynikiem nie może być $\ln x$.

W celu obliczenia $e^{W(0{,}1 \ln 0{,}1)}$ na stronie `www.wolframalpha.com` wpisujemy
`exp(ProductLog(0.1 ln0.1))`

Pożytek z funkcji W. Za pomocą funkcji W możemy rozwiązać wiele ciekawych równań, które na pierwszy rzut oka są nie do rozwiązania. Wadą takich rozwiązań będzie jednak brak ich elementarności, to znaczy nie zostanie podana jawna formuła – będzie w nią „wplątana” funkcja W Lamberta. Rozważmy równanie

$$x^x = 2,$$

które można przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} x \ln x &= \ln 2, \\ \ln x e^{\ln x} &= \ln 2, \\ \ln x &= W(\ln 2), \\ x &= e^{W(\ln 2)} = 1{,}55961\ldots \end{aligned}$$

Rozwiązanie zgrabne, ale niestety (jak ostrzegaliśmy) nie mamy jawnej formuły. Zachęcamy Czytelnika do zmierzenia się z poniższymi wyzwaniami (wystarczy podać jedno rozwiązanie).

1. $x^2 e^x = 2$,
2. $x + e^x = 2$,
3. $x = a + b e^{cx}$,
4. $\ln x = a + \frac{b}{x}$ (wystarczy podać jedno rozwiązanie).

Rozwiązania można znaleźć w tym numerze *Delty*.

Inne zastosowanie. W Δ^4_{20} Autor niniejszego artykułu zaprezentował nieskończone wieże potęgowe. Okazuje się, że dzięki funkcji W można uzasadnić opisane tam równości (potęgi ciągną się w nieskończoność):

$$\sqrt[e]{e}^{\sqrt[e]{e}^{\sqrt[e]{e}^{\cdots}}} = e, \qquad \left(\frac{1}{e^e}\right)^{\left(\frac{1}{e^e}\right)^{\left(\frac{1}{e^e}\right)^{\cdots}}} = \frac{1}{e}.$$

Czytelnika, który poznał już nieco matematyki wyższej, zachęcamy do lektury na stronie `cs.uwaterloo.ca/research/tr/1993/03/W.pdf`. Zamieszczono tam dużo ciekawych przykładów zastosowania funkcji W.

Rozwiązanie zadania F 1022.
W temperaturze $T_0 = 273{,}15$ K hel i azot z dużą dokładnością spełniają równanie gazu doskonałego. Należy jednak pamiętać, że azot tworzy molekuły dwuatomowe, a hel jest gazem szlachetnym o molekułach jednoatomowych. Zgodnie z prawem Daltona ciśnienie mieszaniny gazów doskonałych jest sumą ciśnień składników. Mamy więc:

$$p = p_{He} + p_{Ne} = (n_{He} + n_N)\frac{RT}{V},$$

$$\rho = \frac{n_{He}\mu_{He} + 2n_N\mu_N}{V},$$

gdzie p, n i μ oznaczają, odpowiednio, ciśnienie, liczbę moli i masę atomową, a indeksy He i N oznaczają wartości tych wielkości dla odpowiedniego składnika mieszaniny. Rozwiązaniem tego układu równań jest:

$$\frac{n_{He}}{V} = \frac{\frac{p}{RT_0} - \frac{\rho}{2\mu_N}}{1 - \frac{\mu_{He}}{2\mu_N}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych $n_{He}/V \approx 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ mol/l.