Kongruencje na szachownicy

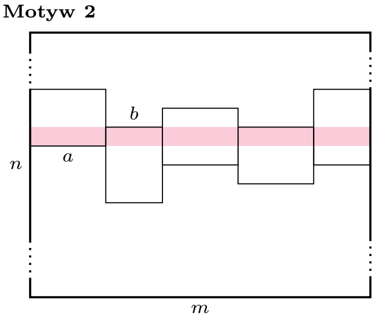
Bartłomiej BZDĘGA

Zachęcam Czytelnika do zapoznania się z artykułem *Kolorowe szachownice* autorstwa Anny Hoduń, który ukazał się w gazetce *Kwadrat*, nr 13 (gazetka znajduje się na stronie internetowej OMJ). Są w nim opisane standardowe metody rozwiązywania zadań dotyczących podziału pewnych figur na inne. Niniejszy odcinek *kącika* inspirowany jest pracą *Nie tylko kolorowe szachownice*, którą dwa lata temu napisała moja uczennica, Klaudia Tarabasz. W tej pracy pokazane są inne metody rozwiązywania takich zadań, a jedną z nich jest stosowanie kongruencji.

Dla przypomnienia: zapis $a \equiv b \pmod{n}$ oznacza, że a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez n. Opiszę tu dwa motywy związane z podziałami i kongruencjami.

Motyw 1. Figurę mającą N pól chcemy podzielić na figury mające a i b pól. Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $N = ax + by$ dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych x i y, które są liczbami wykorzystanych figur pierwszego i drugiego rodzaju. Warunkiem koniecznym rozwiązalności takiego równania jest podzielność $\mathtt{NWD}(a,b) \mid N$. Z tego równania wynikają kongruencje $ax \equiv N \pmod{b}$ oraz $by \equiv N \pmod{a}$, dzięki którym dowiemy się czegoś o x i y. Analogicznie można postąpić, jeżeli jest więcej rodzajów figur.

Motyw 2



Motyw 2. Przypuśćmy, że szachownicę $m \times n$ można podzielić na prostokąty o wymiarach $a \times b$. Niech $a \geqslant b$. Prostokąty, które mają wysokość b i szerokość a, nazwijmy poziomymi, a pozostałe – pionowymi. Ponumerujmy wiersze szachownicy liczbami od 1 do n, z góry na dół. Niech x_i oznacza liczbę tych poziomych prostokątów, których najwyżej położone pola znajdują się w i-tym wierszu. W k-tym wierszu znajduje się po a pól każdego z prostokątów poziomych, mających górne pola w wierszach o numerach $k, k-1, \ldots, k-b+1$, oraz po b pól prostokątów pionowych, przez które ten wiersz przechodzi (rysunek). Wobec tego dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi kongruencja

$$a(x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-b+1}) \equiv m \pmod{b},$$

przy czym $x_i = 0$ dla $i \leqslant 0$ oraz dla $i > n - b + 1$.

Warto zauważyć tu okresowość $x_{k+b} \equiv x_k \pmod{b}$ dla $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, którą otrzymamy, odjąwszy dwie kolejne kongruencje stronami.

Jeżeli w podziale są figury innego rodzaju, to przez z_i oznaczmy liczbę pól i-tego wiersza zajętych przez te dodatkowe figury. Kongruencja dla k-tego wiersza wygląda wtedy następująco:

$$a(x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-b+1}) \equiv m - z_k \pmod{b}.$$

Można utworzyć cztery układy kongruencji tego typu – dla wierszy lub kolumn, rozpatrując prostokąty pionowe lub poziome. Dają one pewne informacje o liczbach figur w poszczególnych wierszach i kolumnach. Niektóre z tych układów prowadzą do sprzeczności – w tej sytuacji mamy dowód niemożliwości dokonania danego podziału.

Zadania

1. Kwadratową szachownicę podzielono na prostokąty 2×1. Udowodnić, że liczba prostokątów zorientowanych pionowo jest parzysta.
2. Udowodnić, że szachownicy 10×10 nie można rozciąć na prostokąty 1×4.
3. Uogólnić poprzednie zadanie – dowieść, że jeśli prostokąt $n \times m$ można podzielić na prostokąty $a \times b$, przy czym $\mathtt{NWD}(a,b) = 1$, to co najmniej jedna z liczb m, n dzieli się przez a i co najmniej jedna z liczb m, n dzieli się przez b.
4. Czy prostopadłościan $8 \times 9 \times 10$ można podzielić na prostopadłościany $2 \times 3 \times 3$?
5. Szachownicę 2018×2018 pokryto za pomocą jednej płytki kwadratowej 2×2 oraz pewnej liczby płytek prostokątnych 1×5. Dowieść, że płytka kwadratowa nie dotyka brzegu szachownicy.
6. Szachownicę 8×8 podzielono na prostokąty 1×3 i jeden kwadrat 1×1. Na którym polu może znajdować się ten kwadrat?
7. Szachownicę 15×15 podzielono na kwadraty 2×2 i 3×3. Wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę kwadratów 3×3 w tym podziale.

Wskazówki do zadań

1. Wystarczy zastosować jeden z układów kongruencji z motywu 2.
2. Postąpić podobnie jak w poprzednim zadaniu – wykazać, że liczby pionowych i poziomych prostokątów są parzyste.
3. Zastosować motyw 2. Potrzebne będą dwa układy kongruencji – dla prostokątów poziomych i pionowych.
4. Co się dzieje na ścianie 8×10?
5. Przypuśćmy, że to możliwe, i obróćmy szachownicę tak, by kwadrat 2×2 dotykał jej górnego boku. Układ kongruencji modulo 5 (motyw 2) jest sprzeczny.
6. Przypuśćmy, że kwadrat znajduje się w k-tym wierszu. W układzie kongruencji modulo 3 (motyw 2) zmieni się tylko k-ta kongruencja. Zauważyć, że $x_8 \equiv k \pmod{3}$, więc $3 \mid k$, gdyż $x_8 = 0$. Analogicznie jest dla kolumn, więc ostatecznie możliwe są 4 pola. Łatwo sprawdzić, że odpowiednie podziały istnieją.
7. Niech x i y oznaczają, odpowiednio, liczbę kwadratów 2×2 i 3×3. Z równości $4x + 9y = 225$ otrzymamy $y \equiv 1 \pmod{4}$, więc $y \in \{1, 5, 9, \ldots\}$ (motyw 1). Stosując układ kongruencji modulo 2 dla kwadratów 3×3 w wierszach i kolumnach (motyw 2), dowodzimy, że jeśli $y \leqslant 5$, to $y = 5$ oraz każdy wiersz i każda kolumna przechodzi przez dokładnie jeden kwadrat 3×3. Jednak wtedy jest problem z wypełnieniem pozostałego miejsca kwadratami 2×2. Przykład dla $y = 9$ skonstruować łatwo.