Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2021

Zadania z matematyki nr 819, 820

Redaguje Marcin E. KUCZMA

819. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkącików o boku 1. Rozważamy ciągi kolejno przyległych trójkącików, z których żaden nie powtarza się (trójkąciki przyległe mają wspólny bok).
(**a**) Wyznaczyć największą możliwą liczbę trójkącików w takim ciągu.
(**b**) Czy i jak zmieni się wynik, jeśli dodatkowo zażądamy, by ostatni trójkącik przylegał do pierwszego?

820. Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich a, b, c:

$$\frac{a^2}{b^2+bc}+\frac{b^2}{c^2+ca}+\frac{c^2}{a^2+ab}\geqslant\frac{3}{2}\,.$$

Zadanie 820 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2020

Przypominamy treść zadań:

811. Funkcja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma tę własność, że każda z funkcji $g(x)=xf(x)$ oraz $h(x)=2f(2x)-f(x)$ ma granicę 0 przy $x\to 0$. Czy stąd wynika, że także funkcja f ma granicę 0 przy $x\to 0$?

812. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ iloczyn $\prod\limits_{k=2}^{n}(2^k-2)$ dzieli się przez $n!$.

811. Odpowiedź: tak. *Dowód:* dla $x\neq 0$ niech $H(x)$ oznacza kres górny wartości $|h(t)|$, gdy $0<|t|\leqslant|x|$. Skoro $\lim_{x\to 0}h(x)=0$, zatem także $\lim_{x\to 0}H(x)=0$. Z określenia funkcji g i h wynika związek $g(2t)-g(t)=th(t)$. Dlatego

$$g(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(g\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-g\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)+g\left(\frac{x}{2^n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{2^k}h\left(\frac{x}{2^k}\right)+g\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

dla każdej liczby naturalnej n. Jasne, że $|h(x/2^k)|\leqslant H(x)$ dla $k\geqslant 1$. Tak więc

$$|g(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}|x|\cdot H(x)+\left|g\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\leqslant|x|\cdot H(x)+\left|g\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|$$

dla $x\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$. Przy ustalonym $x\neq 0$ przechodzimy z n do nieskończoności i otrzymujemy oszacowanie $|g(x)|\leqslant|x|\cdot H(x)$, słuszne dla wszystkich $x\neq 0$. Podzielenie przez $|x|$ daje nierówność $|f(x)|\leqslant|H(x)|$. Stąd teza.

812. Niech $v_p(N)$ oznacza wykładnik potęgi, w jakiej liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu liczby naturalnej N. Dany w treści zadania iloczyn oznaczmy W_n. Do uzyskania tezy zadania wystarczy pokazać, że $v_p(W_n)\geqslant v_p(n!)$ dla każdej liczby pierwszej p.

Ustalmy liczbę pierwszą p. Jeżeli $p\geqslant 3$, to na mocy małego twierdzenia Fermata dzieli ona różnicę $2^{p-1}-1$. Jest zatem (dla $j=1,2,3,\ldots$) dzielnikiem liczby $\left(2^{p-1}\right)^j-1$, więc także i jej dwukrotności, czyli liczby $2^{pj-j+1}-2$. Liczby tej ostatniej postaci są czynnikami iloczynu definiującego W_n, gdy $pj-j+1\leqslant n$, czyli dla $j=1,2,\ldots,\lfloor\frac{n-1}{p-1}\rfloor$. Wobec tego

$$v_p(W_n)\geqslant\left\lfloor\frac{n-1}{p-1}\right\rfloor \tag{1}$$

dla każdej liczby pierwszej $p\geqslant 3$. Jest to również prawda dla $p=2$, bowiem wówczas prawa strona (1) to $n-1$, zaś W_n jest iloczynem $n-1$ liczb parzystych.

Niech m będzie największym wykładnikiem, dla którego $p^m\leqslant n$. Oszacowanie wartości $v_p(n!)$ uzyskamy przez sekwencję zależności (w której początkowa równość to *wzór Legendre'a* – dobrze znany, a przy tym nietrudny do wykazania):

$$v_p(n!)=\sum_{i=1}^{m}\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{n}{p^i}=\frac{n}{p}\cdot\frac{1-p^{-m}}{1-p^{-1}}=\frac{n-np^{-m}}{p-1}\leqslant\frac{n-1}{p-1}\,.$$

Stąd wniosek, że

$$v_p(n!)\leqslant\left\lfloor\frac{n-1}{p-1}\right\rfloor. \tag{2}$$

Nierówności (1) i (2) składają się na dowodzoną tezę $v_p(W_n)\geqslant v_p(n!)$. To kończy rozwiązanie zadania.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 805 ($WT=1{,}61$) i 806 ($WT=1{,}80$) z numeru 9/2020

Janusz Olszewski	Warszawa	46,84
Marek Spychała	Warszawa	46,39
Tomasz Wietecha	Tarnów	45,86
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Jerzy Cisło	Wrocław	33,45

Nowicjuszem nie jest (!) żaden z trzech Panów: Janusz Olszewski (po raz 21), Marek Spychała (po raz 3), Tomasz Wietecha (po raz 13). Pięknie! Tak dalej! Serdecznie gratulujemy!

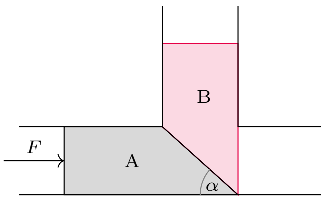
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2021

Zadania z fizyki nr 716, 717

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

716. Sztabka A może poruszać się w prowadnicy poziomej, a sztabka B w prowadnicy pionowej (rys. 1). Ścianki prowadnic są idealnie gładkie. Płaszczyzna styku sztabek nachylona jest do poziomu pod kątem α, a współczynnik tarcia między sztabkami wynosi μ. Jaką poziomą siłę należy przyłożyć do sztabki A, aby wprawić ją w ruch? Masa sztabki B jest równa m.



Rys. 1

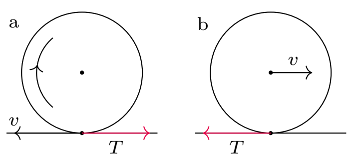
717. Do ogrzewania budynku wykorzystywane jest ciepło oddawane przez pracujący silnik cieplny. Silnik ten napędza chłodziarkę, która pobiera ciepło od wód gruntowych i również ogrzewa wodę w kaloryferach. Jaka jest maksymalna sprawność takiego cyklu ogrzewczego, jeżeli temperatura w kotle silnika cieplnego wynosi $t_1 = 210°\mathrm{C}$, temperatura wody w kaloryferach równa jest $t_2 = 60°\mathrm{C}$, a wody gruntowe mają temperaturę $t_3 = 10°\mathrm{C}$?

Rozwiązania zadań z numeru 12/2020

Przypominamy treść zadań:

708. Na poziomej szorstkiej powierzchni znajdują się dwa jednakowe cienkościenne, puste w środku walce, których osie są równoległe. Jeden walec spoczywa, drugi toczy się w jego kierunku bez poślizgu z prędkością v. Następuje zderzenie sprężyste (tarcie między walcami podczas zderzenia można zaniedbać). Współczynnik tarcia między walcami i powierzchnią wynosi μ. Jaka jest największa odległość między walcami po zderzeniu?

709. Statek kosmiczny oddala się radialnie od Ziemi z prędkością $v = 3c/5$ (c – prędkość światła w próżni). Ze statku nadawana jest audycja radiowa. Czas nadawania audycji w studio na statku $\tau = 30$ min. Jak długo trwa odbiór audycji na Ziemi?



Rys. 2

708. Natychmiast po zderzeniu toczący się walec straci prędkość ruchu postępowego, zachowując prędkość kątową ruchu obrotowego (rys. 2a), a spoczywający walec uzyska prędkość ruchu postępowego v (rys. 2b). Na oba walce zacznie działać siła tarcia $T = \mu mg$ (m jest masą walca). Walce zaczną poruszać się z poślizgiem. Ich równania ruchu postępowego i obrotowego są jednakowe: $ma = \mu mg$, $mR^2\varepsilon = \mu mgR$, gdzie R jest promieniem walca. Prędkość ruchu postępowego walca lewego rośnie, a jego prędkość ruchu obrotowego maleje: $v_1 = at = \mu gt$, $\omega_1 = \omega - \varepsilon t = v/R - \mu gt/R$. Zacznie on toczyć się bez poślizgu po czasie t_0, gdy spełniony będzie warunek $v_1 = \omega_1 R$, stąd $t_0 = v/2\mu g$, $v_1(t_0) = v/2$. W czasie t_0 lewy walec przebędzie drogę $s_1 = v^2/8\mu g$. Do czasu rozpoczęcia ruchu bez poślizgu prędkość ruchu postępowego walca prawego maleje, a jego prędkość kątowa rośnie. Rozumując analogicznie jak poprzednio, otrzymujemy, że po takim samym czasie t_0 walec prawy rozpocznie ruch bez poślizgu z taką samą prędkością $v/2$ i przebędzie drogę $s_2 = 3v^2/8\mu g$. Maksymalna odległość między walcami wynosi

$$s_2 - s_1 = v^2/4\mu g.$$

709. Przyjmijmy, że w chwili startu obserwatorzy na Ziemi i kosmonauci zsynchronizowali swoje zegarki, uznając tę chwilę za zerową. Oznaczmy przez t_1' i t_2' czasy rozpoczęcia i zakończenia nadawania audycji według kosmonautów. Wtedy $\tau = \Delta t' = t_2' - t_1'$. Jest to czas własny tego procesu, bo na statku wszystko dzieje się w jednym miejscu. Czas nadawania audycji według obserwatora na Ziemi jest dłuższy:

$$(*) \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = \Delta t'/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Z punktu widzenia obserwatora na Ziemi audycję rozpoczęto nadawać w chwili t_1, gdy statek znajdował się w odległości $x_1 = vt_1$ od Ziemi. Sygnał początkowy dotarł do Ziemi z opóźnieniem vt_1/c, sygnał końcowy z opóźnieniem vt_2/c. Czas odbioru audycji na Ziemi wynosi więc

$$\tau_x = \Delta t + vt_2/c - vt_1/c = \Delta t\,(1 + v/c).$$

Po podstawieniu $(*)$ otrzymujemy

$$\tau_x = \tau\,(1 + v/c)/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \tau\sqrt{(c+v)/(c-v)} = 60 \text{ min}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 702 ($WT = 2{,}1$), 703 ($WT = 2{,}53$), 704 ($WT = 2{,}1$) i 705 ($WT = 2{,}53$) z numeru 9/2020 i 10/2020

Krzysztof Magiera (Łosiów)	4 – 44,73
Michał Koźlik (Gliwice)	4 – 42,82
Tomasz Rudny (Poznań)	41,38
Jan Zambrzycki (Białystok)	2 – 39,65
Tomasz Wietecha (Tarnów)	14 – 37,15
Ryszard Woźniak (Kraków)	31,46
Jacek Konieczny (Poznań)	31,33
Konrad Kapcia (Częstochowa)	1 – 27,95
Aleksander Surma (Myszków)	4 – 27,75
Sławomir Buć (Mystków)	26,74
Piotr Adamczyk (Warszawa)	25,98
Mateusz Kapusta (Wrocław)	25,37
Paweł Perkowski (Ożarów)	23,98

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.