

Jak wyglądałaby grawitacja na płaskiej Ziemi?

*Katedra Fizyki Teoretycznej, Lwowski Uniwersytet Narodowy imienia Iwana Franki, Lwów, Ukraina

Andrij ROVENCHAK*

Ludzie zauważyli zakrzywienie powierzchni Ziemi wieki temu. Wystarczy wspomnieć klasyczny przykład chowania się statku za horyzontem dużo wcześniej, niż przestałby być widoczny z powodu oddalenia.



Rys. 1. Mem internetowy

Punktowa masa M znajdująca się w początku układu współrzędnych wytwarza w punkcie \mathbf{r} potencjał grawitacyjny

$$(3) \quad \varphi(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{|\mathbf{r}|},$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Odpowiadające temu potencjałowi natężenie pola grawitacyjnego $\mathbf{\Gamma}$ jest dane wzorem

$$(4) \quad \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

stąd siła, z jaką masa M przyciąga masę m znajdującą się w punkcie \mathbf{r} , wynosi

$$(5) \quad \mathbf{F} = \mathbf{\Gamma}m = -G \frac{Mm}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

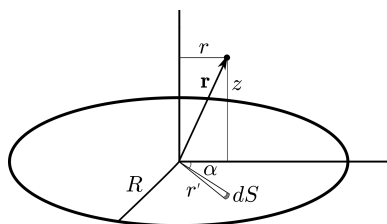
co stanowi treść prawa powszechnego ciężenia Newtona. Potencjał od układu mas M_i znajdujących się w punktach \mathbf{r}_i jest dany wzorem

$$(6) \quad \varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \varphi_i = \sum_i \left(-G \frac{M_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right).$$

Rozciągając masy punktowe, aby zajmowały pewne małe objętości ΔV_i , tak aby $M_i = \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i$, gdzie $\rho(\mathbf{r})$ jest gęstością, dochodzimy do sformułowania dla ciągłego rozkładu masy:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -G \sum_i \frac{\rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Delta V_i \rightarrow 0} -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$



Rys. 2. Układ współrzędnych walcowych i jego orientacja względem dysku

Już w roku 350 p.n.e Arystoteles pisał o kulistym kształcie Ziemi w swoim traktacie *O niebie* (po grecku: *Περί οὐρανοῦ*, po łacinie: *De Caelo*) [1], a według Strabo i Diogenesa Laertiosa takie stwierdzenia były wygłaszane przez Parmenidesa, przedsokratejskiego filozofa VI–V wieku p.n.e. [2].

W rzeczywistości powierzchnia Ziemi nie jest idealną sferą, nie jest nawet elipsoidą, jest raczej skomplikowaną powierzchnią zwaną geoidą, porównywaną czasami do kształtu ziemniaka.

Mimo tych wszystkich dobrze znanych faktów dotyczących kształtu Ziemi wciąż jest wielu ludzi przekonanych, że nasza planeta ma kształt płaskiego dysku. Loty w kosmos, obserwacje astronomiczne, w tym zaćmienia, nie są w stanie przekonać „płaskoziemców” do zmiany poglądu. Znany mem internetowy (rys. 1) mówi, że gdyby Ziemia faktycznie była płaska, to koty już dawno wszystko zepchnęłyby z krawędzi. Lecz, jak zobaczymy dalej, cała sprawa nie jest aż tak prosta. W tym artykule spróbujemy więc zbadać dokładniej, jakie konsekwencje ma przyjęcie płaskiego modelu Ziemi. Przeanalizujemy, jakie właściwości miałyby pole grawitacyjne pochodzące od jednorodnego płaskiego dysku, i przekonamy się, że grawitacja na płaskiej Ziemi byłaby zupełnie inna od tego, co obserwujemy. Prezentowane wyniki zaczerpnięte są z artykułu O. Kuzii i A. Rovenchaka z roku 2019 [3].

Potencjał grawitacyjny

Potencjał grawitacyjny wytwarzany przez masę rozłożoną na pewnej powierzchni S dany jest wzorem

$$(7) \quad \varphi(\mathbf{r}) = -G \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

gdzie $\sigma(\mathbf{r}')$ jest gęstością powierzchniową. O takim rozkładzie możemy myśleć jako o masywnej warstwie z zaniedbywalną grubością.

Jako model płaskiej Ziemi przyjmijmy dysk o promieniu R i stałej gęstości powierzchniowej $\sigma = \text{const}$. Problem ten wygodnie opisuje się w zmiennych walcowych. Obserwator znajduje się w punkcie $(r, 0, z)$, a element powierzchni $dS = r' dr' d\alpha$ ma współrzędne $(r', \alpha, 0)$, jak na rysunku 2. Odległość $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ wygodniej jest obliczyć we współrzędnych kartezjańskich, gdzie $\mathbf{r} = (r, 0, z)$ i $\mathbf{r}' = (r' \cos \alpha, r' \sin \alpha, 0)$, czyli

$$(8) \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(r - r' \cos \alpha)^2 + (0 - r' \sin \alpha)^2 + (z - 0)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - 2r'r \cos \alpha + r'^2 + z^2}.$$

Zatem potencjał grawitacyjny jest dany przez

$$(9) \quad \varphi(r, z) = -G\sigma \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{r^2 + z^2 + r'^2 - 2r'r \cos \alpha}}.$$

Obliczanie potencjału i natężenia pola grawitacyjnego

Obliczenie całek (9) okazuje się nieoczekiwanie trudnym zadaniem: wynik nie wyraża się przez funkcje elementarne. Nawet obliczenie potencjału od cienkiego pierścienia (co mogłoby się wydawać łatwiejsze od przypadku dysku) prowadzi do tak zwanych *całek eliptycznych*. Aby uniknąć zmagania się z tak trudnymi obliczeniami, posłużymy się pewnym przybliżeniem, a mianowicie rozwinięciem w szereg. Taki zabieg pozwoli nam otrzymać w nietrudny sposób pewne ciekawe wnioski.

Najpierw rozważmy wewnętrzną całkę po r' z równania (9):

$$(10) \quad \mathcal{I}(r, z; \alpha) = \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{r^2 + z^2 + r'^2 - 2r'r \cos \alpha}}$$

$$= \sqrt{z^2 + r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha} - \sqrt{z^2 + r^2}$$

$$+ r \cos \alpha \left[\ln \left(R - r \cos \alpha + \sqrt{z^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} \right) \right. \\ \left. - \ln \left(\sqrt{z^2 + r^2} - r \cos \alpha \right) \right].$$

Zewnętrzna całka α nie daje się wyrazić przez funkcje elementarne. Rozwiemy więc funkcję podcałkową w szereg względem r/R i scałkujemy to rozwinięcie wyraz po wyrazie:

$$(11) \quad \varphi(r, z) = -G\sigma \int_0^{2\pi} \mathcal{I}_{\text{szereg}}(r, z; \alpha)$$

$$= -G\sigma \left[2\pi \left(z - \sqrt{z^2 + R^2} \right) + \frac{\pi R^4}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{3\pi R^6 (R^2 - 4z^2)}{32(z^2 + R^2)^{7/2}} \left(\frac{r}{R} \right)^4 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^6 \right) \right]$$

$$= \varphi_0(z) + \varphi_2(z) \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \varphi_4(z) \left(\frac{r}{R} \right)^4 + \dots$$

Ponieważ w wyrażeniu (11) nie ma zależności od kąta, natężenie pola ma postać:

$$(12) \quad \mathbf{\Gamma} = -\text{grad} \varphi(r, z) = \Gamma_r \mathbf{e}_r + \Gamma_z \mathbf{e}_z,$$

gdzie

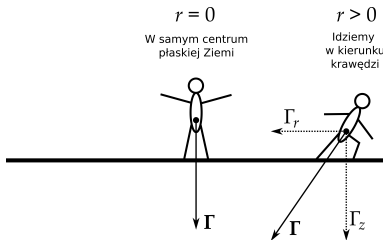
$$(13) \quad \Gamma_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \Gamma_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Składowe natężenia pola są dane przez:

$$(14) \quad \Gamma_r = -G\sigma \left[\frac{\pi R^3}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left(\frac{r}{R} \right) + \frac{3\pi R^5 (R^2 - 4z^2)}{8(z^2 + R^2)^{7/2}} \left(\frac{r}{R} \right)^3 + \dots \right],$$

$$(15) \quad \Gamma_z = -G\sigma \left[2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) - \frac{3\pi z R^4}{2(z^2 + R^2)^{5/2}} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \dots \right].$$

Z analizy tych wyrażeń możemy wyciągnąć pewien jakościowy wniosek na temat własności pola grawitacyjnego na płaskiej Ziemi. Ilustruje go rysunek 3.



Rys. 3. Kierunek siły grawitacji na płaskiej Ziemi pochyla się coraz bardziej w miarę oddalania od środka dysku

Składowa radialna pola grawitacyjnego (równoległa do powierzchni Ziemi) rośnie w miarę oddalania się od środka dysku i zbliżania się do krawędzi. Jak się przekonamy, powoduje to zmianę wartości siły grawitacji i jej kierunku od prostopadłego w środku do prawie poziomego na krawędzi. Oznacza to, że osoba poruszająca się w stronę krawędzi płaskiej Ziemi będzie musiała coraz bardziej się pochylać [4, 5]. Będzie więc miała wrażenie, jakby szła coraz bardziej „pod górkę”.

Wyniki obliczeń numerycznych dla pola grawitacyjnego

Aby otrzymać pewne wyniki numeryczne, ustalamy jeden z parametrów opisujących problem – gęstość powierzchniową σ . Zakładając, że natężenie pola na powierzchni (w granicy $z \rightarrow 0^+$), dokładnie w jej środku ($r = 0$), jest równe przyspieszeniu ziemskiemu $\mathbf{g} = 9,8 \text{ N/kg}$ skierowanemu prostopadle do dysku, otrzymujemy:

$$(16) \quad \mathbf{\Gamma}(0, 0) = \Gamma_z(0, 0) \mathbf{e}_z; \quad \Gamma_z(0, 0) = -9,8 \text{ N/kg}.$$

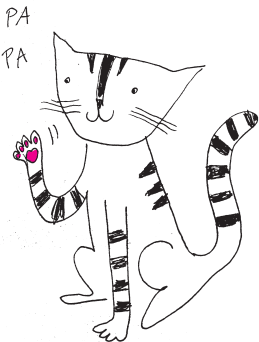
Z równań (14)–(15) wynika, że

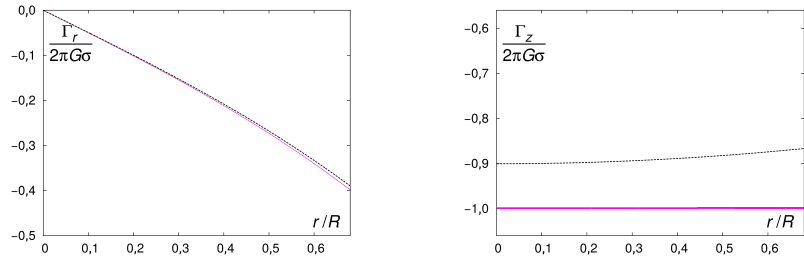
$$(17) \quad \Gamma_z(0, 0) = -2\pi G\sigma,$$

zatem

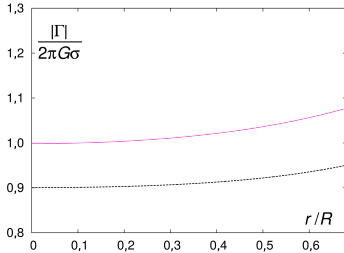
$$(18) \quad 2\pi G\sigma = g = 9,8 \text{ N/kg}.$$

Kolejny parametr – promień płaskiej Ziemi R – może zostać wybrany jako jednostka długości.

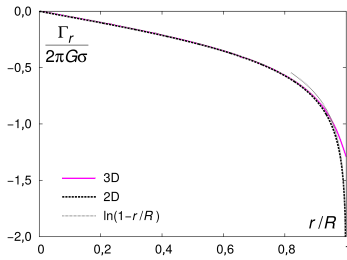




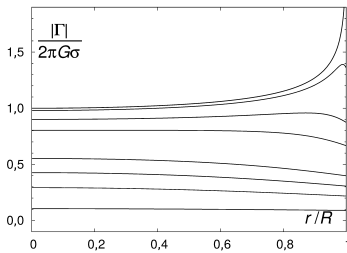
Rys. 4. Składowe pola grawitacyjnego na powierzchni (zielona ciągła linia) i na wysokości $z = 0,1R$ (czarna linia przerywana) obliczone z rozwinięć (14)–(15)



Rys. 5. Natężenie pola grawitacyjnego na powierzchni (zielona ciągła linia) i na wysokości $z = 0,1R$ (czarna linia przerywana) obliczone z rozwinięć (14)–(15)



Rys. 6. Składowe pola grawitacyjnego Γ_r na powierzchni. Zielona linia ciągła (3D) odpowiada ścisłym obliczeniom dla grubego dysku (o grubości $H = 0,1R$), czarna przerywana linia (2D) opisuje ściśle rozwiązanie cienkiego dysku (o zerowej grubości), a trzecia linia (oznaczona $\ln(1 - r/R)$) opisuje zachowanie asymptotyczne opisane równaniem (24)



Rys. 7. Natężenie pola grawitacyjnego na różnych wysokościach nad powierzchnią. Linie (od góry do dołu odpowiadają wysokościami $h = 0; 0,02R; 0,05R; 0,1R; 0,2R; 0,3R; 0,5R; 0,7R; 1,0R; 1,5R; 2,0R$)

Wyniki obliczeń przy użyciu rozwinięcia w szereg (14)–(15) przedstawione są na rysunkach 4 i 5. Widać na nich, że składowa pionowa pola grawitacyjnego Γ_z nie zmienia się znacząco w dużym obszarze wokół centrum płaskiej Ziemi. Składowa radialna Γ_r rośnie znacznie szybciej z odległością od centrum, ale nie zmienia się istotnie z wysokością nad powierzchnią.

Na krawędzi świata

Rozwinięcie w szereg zaprezentowane wcześniej jest dobrym przybliżeniem tylko dla $r \lesssim R/2$. Gdy zbliżamy się do krawędzi dysku, czyli $r \lesssim R/2$, natężenie pola grawitacyjnego gwałtownie rośnie. Potwierdza to poniższy rachunek:

$$(19) \quad \varphi_{\text{dysk}}(r, z) = -G\sigma \int_0^R dr' \int_0^{2\pi} \frac{r' d\alpha}{\sqrt{r^2 + z^2 + r'^2 - 2r'r \cos \alpha}}$$

$$= -4G\sigma \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{(r' + r)^2 + z^2}} K \left(\frac{4r'r}{(r' + r)^2 + z^2} \right),$$

gdzie K jest całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju:

$$(20) \quad K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - m \sin^2 \theta}.$$

Osobliwość potencjału grawitacyjnego bierze się z zachowania $K(m)$ dla $m \rightarrow 1$. Kiedy argument dąży do jedności, to mamy następujące przybliżenie:

$$(21) \quad K(m) \Big|_{m \rightarrow 1} \sim -\frac{1}{2} \ln(1 - m),$$

czyli w pobliżu powierzchni ($z \rightarrow 0$) dla $r' \rightarrow r$ otrzymujemy

$$(22) \quad K \left(\frac{4r'r}{(r' + r)^2} \right) \sim -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{4r'r}{(r' + r)^2} \right) = -\ln|r' - r| + \ln(r' + r).$$

Dla potencjału otrzymujemy przybliżenie postaci

$$(23) \quad \varphi_{\text{dysk}}(r, 0) \Big|_{r \rightarrow R} \sim 4G\sigma \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{(r' + r)^2}} \ln|r' - r| \simeq 2G\sigma \int_0^R dr' \ln|r' - r|.$$

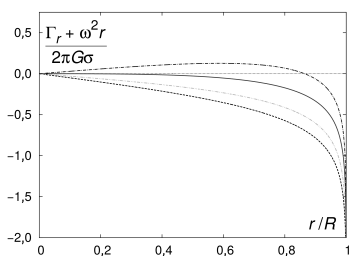
Natomiast dla natężenia pola otrzymujemy

$$(24) \quad \Gamma_r = -\frac{\partial \varphi_{\text{dysk}}}{\partial r} \sim 2G\sigma \ln \left(1 - \frac{r}{R} \right).$$

Wyniki obliczeń dla składowej Γ_r są przedstawione na rysunku 6. Warto zauważyć, że skończona (niezerowa) grubość spowodowałaby wygładzenie osobliwości w pobliżu powierzchni. Natężenie pola na różnych wysokościach jest pokazane na rysunku 7. Jak widać, pole jest rozbieżne tylko na powierzchni i staje się prawie jednorodne dla wysokości $h \sim R$.

Płaskoziemcy kontratakują?

Rozważmy teraz sytuację, kiedy ziemski dysk obraca się w swojej płaszczyźnie. Z równania (14) można wywnioskować, że dla małych r radialna składowa pola grawitacyjnego Γ_r jest proporcjonalna do r , tak samo jak siła odśrodkowa $m\omega^2 r$, gdzie ω jest prędkością kątową. Czyli w pobliżu środka składowa radialna pola

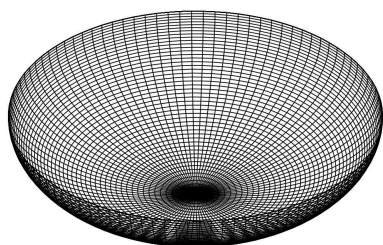


Rys. 8. Składowa radialna natężenia pola grawitacyjnego równoważona przez siłę odśrodkową. Krzywe od dołu do góry to odpowiednio:

- składowa Γ_r (dla $\omega = 0$),
- przypadek $\omega < \omega_0$,
- przypadek $\omega = \omega_0$,
- przypadek $\omega > \omega_0$



Rys. 9. Zaćmienie Księżyca widoczne z płaskiej Ziemi



Rys. 10. Schematyczny obraz płaskiej Ziemi postrzegany na podstawie wysiłku potrzebnego do przemieszczenia się od środka w kierunku krawędzi

grawitacyjnego może zostać częściowo skompensowana, jeżeli

$$(25) \quad \pi G \sigma \frac{r}{R} = \omega_0^2 r.$$

Biorąc pod uwagę równanie (18) i wybierając $R = 6400$ km, czyli przybliżoną wartość promienia naszej Ziemi, otrzymujemy

$$(26) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\pi G \sigma}{R}} = \sqrt{\frac{g}{2R}} \simeq 0,0009 \text{ s}^{-1},$$

co tłumaczy się na okres obrotu $2\pi/\omega_0 \simeq 2$ godziny. Byłaby to dosyć duża prędkość obrotu w porównaniu do 24 godzin. Zauważmy, że dla mniejszych wartości ω składowa Γ_r byłaby kompensowana tylko częściowo, natomiast dla $\omega > \omega_0$ kierunek pola zmieniałby się w pewnej odległości od centrum. Rozważania te ilustruje rysunek 8.

Drugim sposobem, żeby ratować model płaskiej Ziemi, jest wprowadzenie niejednorodności w rozkładzie gęstości, a najprostszym podejściem jest wprowadzenie zależności gęstości od współrzędnej radialnej, $\sigma = \sigma(r')$. Taka zależność dawałaby skutki podobne do siły odśrodkowej, a żeby tak było, to gęstość $\sigma(r')$ powinna rosnać w miarę zbliżania się do krawędzi płaskiej Ziemi. Można sprawdzić, że rozkład

$$(27) \quad \sigma(r') = \frac{A}{\sqrt{R^2 - r'^2}}, \quad \text{gdzie } A = \text{const},$$

daje $\varphi(r, 0) = \text{const}$, co oznacza, że na powierzchni płaskiej Ziemi składowa radialna $\Gamma_r = 0$. Rozwiązanie tego problemu jest dosyć skomplikowane i nie będziemy go tu przedstawiać. Należy jednak zauważyć, że tak znaczne niejednorodności gęstości byłyby z pewnością zauważone przez płaskoziemców. Nieskończona wartość gęstości na krawędzi, czyli dla $r' \rightarrow R$, jest dodatkową wadą takiego niejednorodnego modelu. Co więcej, rozkład masy (27) nie zapewnia znikania składowej radialnej Γ_r powyżej powierzchni, czyli dla $z > 0$, a jedynie na samej powierzchni dysku.

Ustawienie słońca pod powierzchnią płaskiej Ziemi mogłoby być przybliżeniem takiego rozkładu masy, ale Wielki A'Tuin zepsuły cały pomysł, będąc dodatkowym źródłem pionowej składowej pola grawitacyjnego.

Wnioski

Z przedstawionych obliczeń wynika, że mieszkańcy płaskiego jednorodnego dysku mieliby wrażenie, że ich świat jest trochę jak wnętrze miednicy (rys. 10), ponieważ idąc w stronę krawędzi dysku, musieliby coraz bardziej się pochylać i mieliby wrażenie wchodzenia pod coraz bardziej stromą górę.

Ogromny wysiłek wymagany do osiągnięcia krawędzi dysku powoduje w szczególności, że najbezpieczniejszą metodą dostania się na antypody jest wydrążenie dziury przez płaską Ziemię [6], najlepiej w jej środku. Grawitacja na płaskiej Ziemi ocali również świat przed memowymi kotami, uniemożliwiając im zrzućcenie wszystkiego z krawędzi dysku.

Mamy nadzieję, że przedyskutowany tu temat okaże się interesujący z kilku powodów. Przede wszystkim pokazaliśmy, jak obliczyć pole grawitacyjne do dwuwymiarowej konfiguracji mas. Po drugie, pokazaliśmy zarówno ściśle, jak i przybliżone obliczenia. Po trzecie, mamy nadzieję, że rubaszny ton artykułu ułatwia w niektórych miejscach przyswojenie prezentowanego materiału.

Literatura

- [1] S. Leggatt. *On the Heavens I and II* (Warminster: Aris & Phillips, 1995).
- [2] S. Weinberg. *To Explain the World: The Discovery of Modern Science* (London: Penguin Books, 2016).
- [3] O. Kuzii and A. Rovenchak. What the gravitation of a flat Earth would look like and why thus the Earth is not actually flat. *European Journal of Physics* **40**(3): 035008 (2019). *Journal of the Korean Physical Society* **71**(1): 37–41 (2017).
- [4] How A Flat Earth Would Effect Gravity—Interesting Animation. youtu.be/dqNPeMIPHaM.
- [5] Is Earth Actually Flat? youtu.be/VNqNnUJcVs
- [6] A. C. Tort. An exercise on Gauss's law for gravitation: the flat Earth model. *Physics Education* **49**(6): 629–631 (2014).