Jak nie wylać herbaty w pociągu?

Maciej OGRODNIK

Wsiadamy do pociągu. Zamawiamy gorącą herbatę i zajmujemy miejsce. Jeszcze zanim pociąg ruszy, pojawia się pytanie: czy herbata nie wyleje się z kubka? Żeby na nie odpowiedzieć, zastanówmy się, jakie siły będą na nas działać. Pociąg rusza z peronu. Dopóki tory nie skręcają, sprawa jest prosta. Możemy w przybliżeniu założyć, że siła jest stała i mamy dobrze nam znany ruch jednostajnie przyspieszony. Po rozpędzeniu, gdy maszynista osiągnie założoną prędkość, pociąg porusza się ruchem jednostajnym. Silnik lokomotywy pracuje tak, żeby zrównoważyć siły oporu (głównie powietrza, ale też tarcia kół). Siedząc w wagonie, nie powinniśmy odczuwać żadnych sił oprócz drobnych trzęsień spowodowanych lekkimi nierównościami szyn.

Do tej pory jedziemy cały czas po prostej. W ten sposób niekoniecznie dojedziemy do naszego celu. Kiedyś pociąg musi skręcić. Jaka wtedy będzie na nas działać siła? Załóżmy, że jedziemy po łuku – wycinku okręgu. Jeśli jedziemy ze stałą szybkością, to sytuacja jest znajoma. Poruszamy się tymczasowo ruchem jednostajnym po okręgu.

Odpowiednio dobierając układ współrzędnych, możemy nasz ruch opisać parametrycznie przez równanie:

$$p(t) = r(\cos(\omega t), \sin(\omega t)),$$

gdzie r to promień okręgu, a ω to prędkość kątowa. Prędkość liniową opisuje pochodna

$$p'(t) = r\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t)),$$

a przyspieszenie druga pochodna

$$p''(t) = -r\omega^2(\cos(\omega t), \sin(\omega t)).$$

Wartość przyspieszenia dośrodkowego to $a_d = \frac{\|v\|^2}{r}$, gdzie $\|v\|$ to szybkość liniowa (nasza i naszego wagonu). Będąc w pociągu, poczujemy siłę odśrodkową proporcjonalną do kwadratu szybkości i proporcjonalną do odwrotności promienia łuku, czyli do krzywizny.

Przez $\|w\|$ oznaczamy tutaj długość wektora w; dla wektora w z dwuwymiarowej przestrzeni, jak w naszym przypadku, mamy $\|w\| = \|(w_1, w_2)\| := \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$.

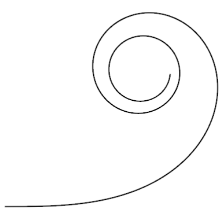
Jeżeli prędkość jest mała, a promień duży, to siła, którą odczujemy, będzie niewielka. Jednak chcemy, żeby pociąg jechał szybko, a nie zawsze można położyć tory tak, żeby robić duże łuki. Jeśli tory przechodziłyby z prostych od razu w ciasny łuk, to pasażerów zaskoczyłaby nagła, duża siła odśrodkowa. To znaczy, że nie mamy czasu, żeby uratować herbatę przed rozlaniem. Dla zwiększenia komfortu podróżnych trzeba tę zmianę wprowadzać stopniowo. Jak to zrobić? Możemy połączyć kilka kawałków coraz mniejszych okręgów aż dojdziemy do docelowego, najciaśniejszego wycinka okręgu. W ten sposób siła dośrodkowa zwiększa się stopniowo ze skokiem przy każdym przejściu na mniejszy okrąg, a pasażerowie mają czas zareagować i przechylić się wraz z kubkiem. Czy możemy wejść w zakręt gładziej? Tak. Tutaj z pomocą przychodzi nam na przykład krzywa zwana *klotoidą*. Możemy ją przedstawić parametrycznie wzorem

$$p(t) = \left(\int_0^t \cos(u^2)du, \int_0^t \sin(u^2)du \right).$$

Niech $p(t)$ będzie położeniem wagonu w czasie t w pewnym układzie współrzędnych. Przyspieszenie w czasie t jest równe

$$p''(t) = \frac{d}{dt}(\cos(t^2), \sin(t^2)) = 2t(-\sin(t^2), \cos(t^2)),$$

czyli rośnie liniowo w czasie. Zatem działająca na nas siła zmienia się w sposób ciągły.



Fragment klotoidy. Przy projektowaniu torów wykorzystalibyśmy krótszy kawałek i połączyli go z łukiem okręgu, żeby ograniczyć odczuwalną dla pasażerów siłę odśrodkową

W celu dalszego zwiększenia komfortu podróżnych projektanci linii kolejowych wprowadzają dodatkowo przechylenie torów. W najlepszej sytuacji tory są ustawione tak, że siła wypadkowa (suma ciężaru i siły odśrodkowej) jest ustawiona prostopadle do podłogi przechylonego wagonu. Ten optymalny kąt zależy od wartości siły odśrodkowej, a stąd od szybkości, z którą jedziemy. Jeśli pociąg zawsze jedzie przez zakręt z tą samą prędkością, to moglibyśmy tak przechylić tory, żeby pasażerowie odczuwali jedynie siłę działającą w dół. Jednak po tych samych torach mogą poruszać się pociągi osobowe, pospieszne oraz towarowe, które jeżdżą z różnymi prędkościami. W takim wypadku trzeba pójść na kompromis. Musimy pogodzić się z tym, że czasem pojawi się składowa poprzeczna siły odśrodkowej.

Klotoida jest przykładem stosowanej w inżynierii kolejowej krzywej przejściowej. Ta krzywa w płynny sposób łączy proste kawałki torów z łukami będącymi

Rozwiązanie zadania M 1669.

$1 = \frac{44}{44}$,

$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$,

$3 = \frac{4+4+4}{4}$,

$4 = 4 \cdot (4-4) + 4$,

$5 = \frac{4 \cdot 4 + 4}{4}$,

$6 = 4 + \frac{4+4}{4}$,

$7 = \frac{44}{4} - 4$,

$8 = 4 + 4 + 4 + 4 - 4$,

$9 = 4 + 4 + \frac{4}{4}$,

$10 = \frac{44-4}{4}$,

$11 = \frac{44}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}$,

$12 = \frac{44+4}{4}$,

$13 = \frac{44}{4} + \sqrt{4}$,

$14 = 4 + 4 + 4 + \sqrt{4}$,

$15 = \frac{44}{4} + 4$,

$16 = 4 + 4 + 4 + 4$,

$17 = 4 \cdot 4 + \frac{4}{4}$,

$18 = 4 \cdot 4 + 4 - \sqrt{4}$,

$19 = ?$,

$19 = 4! - 4 - \frac{4}{4}$, gdy użyjemy !,

$20 = 4 \cdot 4 + \sqrt{4} + \sqrt{4}$.

wycinkami okręgów. W praktyce stosowane są też inne krzywe przejściowe. Mogą to być przybliżenia klotoidy, które z pewnych względów łatwiej jest wyznaczyć niż krzywą zadaną parametrycznie przez funkcje nieelementarne. Używane są też krzywe, dla których tempo przyrostu przyspieszenia nie jest stałe (jak dla klotoidy).

Optymalny kąt przechylenia torów jest w przybliżeniu proporcjonalny do krzywizny krzywej. Przy klotoidzie krzywizna rośnie liniowo, więc przechyłka jest wprowadzana liniowo na tej krzywej przejściowej. To znaczy, że przyspieszenie kątowe, związane z przechyłką torów, pojawia się nagle. Jest to problem analogiczny do tego z wprowadzaniem krzywizny do samej trasy pociągu. Aby temu zaradzić, potrzeba, żeby pochodna tempa zmiany przechyłki była ciągła. Przy standardowych prędkościach to nie jest aż tak istotny efekt. Jednak dla linii dużych prędkości dla zwiększenia komfortu krzywe przejściowe są dobierane tak, żeby trzecia pochodna była ciągła. W takim przypadku pochodna przyspieszenia liniowego i przyspieszenie kątowe wprowadzone przez przechylenie torów są ciągłe. To zwiększenie płynności przejścia w zakręt odbywa się jednak kosztem wydłużenia krzywej przejściowej.

Wiemy już, po jakiej krzywej chcemy, żeby poruszał się pociąg dla zwiększenia komfortu pasażerów. Ale zazwyczaj pociągi jadą po torach złożonych z dwóch szyn. Jak te szyny powinny być względem siebie ustawione? Koła pociągu są umieszczone na osiach o pewnej ustalonej szerokości R. Rozstawy torów R mogą być różne w różnych krajach, ale powiedzmy, że w naszej podróży nie musimy się tym przejmować. Szyny powinny być od siebie równo oddalone, żeby koła nie zsunęły się ani do środka ani na zewnątrz.

Dopóki nie skręcamy, to mamy dwie równoległe proste. Na łuku okręgu będą to części okręgów o wspólnym środku i różnicy promieni równej R. Dla krzywych przejściowych potrzebujemy ogólniejszego przepisu na szukanie krzywej równoległej do pewnej krzywej γ:

1. wybierzmy kilka punktów na krzywej γ,
2. wokół każdego z tych punktów narysujmy okrąg o promieniu R,
3. narysujmy krzywą styczną do każdego z tych okręgów.

W przybliżeniu dostaniemy krzywą odległą od γ o R. Żeby znaleźć krzywą, która naprawdę jest oddalona od γ o R, musimy znaleźć krzywą, która jest styczna do każdego z okręgów o promieniu R i środku w pewnym punkcie krzywej γ.

Gdy się tak zastanawialiśmy nad ruchem pociągu, pojawiły nam się dwa pojęcia z geometrii. Pierwsze to krzywizna (płaskiej) krzywej. W przypadku pociągu jadącego ze stałą prędkością krzywizna toru jest proporcjonalna do przyspieszenia dośrodkowego potrzebnego do utrzymania pociągu w szynach. W matematycznym ujęciu powiemy, że krzywizna krzywej $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sparametryzowanej tak, że $\|\gamma'(t)\| = 1$, wynosi

$$\kappa := \|\gamma''(t)\|.$$

Krzywiznę w pewnym punkcie krzywej możemy zdefiniować też jako

$$\kappa := \frac{1}{r},$$

gdzie r to promień „najlepiej” dopasowanego okręgu do krzywej w danym punkcie. Jest to jedno z podstawowych pojęć geometrii różniczkowej. Jego uogólnienia także mają zastosowania w fizyce. Na przykład *średnia krzywizna* powierzchni ma związek z kształtem baniek mydlanych. Z kolei *tensor krzywizny* przestrzeni pozwala sformułować współczesne rozumienie grawitacji w ogólnej teorii względności.

Więcej o średniej krzywiźnie i bańkach mydlanych można przeczytać w artykule *Bańka jaka jest, każdy widzi* (Δ^{7}_{19}).

Więcej można przeczytać w:
Grawitacja i geometria – szybki przegląd, Marcin Domagała (Δ^{5}_{09})
Czy Einstein miał rację?, Michał Bejger (Δ^{12}_{15})
Geometria różniczkowa, Jerzy Konarski (Δ^{4}_{19})

Drugie pojęcie z geometrii to *obwiednia* rodziny krzywych. Jest to krzywa styczna do każdej z krzywych w danej rodzinie. W ten sposób doszliśmy do tego, jak poprowadzić dwie równoległe, zakrzywione szyny.

Za wygodą i bezpieczeństwem pasażerów w pociągu stoi wiele rozwiązań inżynieryjnych, korzystających między innymi z geometrii. Warto się im przyjrzeć, żeby docenić, jak matematyka i fizyka ułatwiają nam codzienne życie.