



Twierdzenie Ptolemeusza

Bartłomiej BZDEGA

Rozważmy czworokąt $ABCD$, który jest wpisany w okrąg. Wybierzmy taki punkt P na przekątnej BD , aby zachodziła równość $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle CAB|$. Wtedy również $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle PAB|$. Oprócz tych dwóch równości mamy jeszcze $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle DCA|$ oraz $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, gdyż są to pary kątów wpisanych, opartych na tych samych łukach. Wobec tego, na mocy cechy (kk), zachodzą następujące podobieństwa trójkątów:

$$\triangle APD \sim \triangle ABC, \quad \triangle ABP \sim \triangle ACD.$$

Przyjmijmy oznaczenia długości odcinków takie jak na rysunku obok.

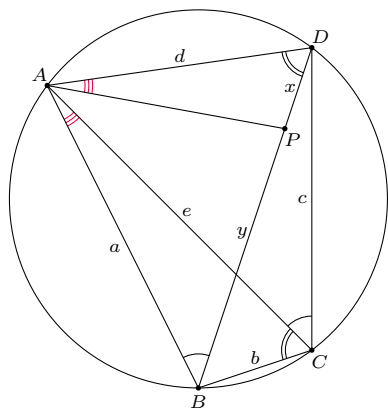
Z pierwszego z podobieństw otrzymujemy proporcję $\frac{x}{d} = \frac{b}{e}$, a z drugiego $\frac{y}{a} = \frac{c}{e}$. Te dwie równości prowadzą do wniosku, że $e(x + y) = bd + ac$. Z tego wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie Ptolemeusza. *Czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg spełnia warunek*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|.$$

W podobny sposób można udowodnić nieco więcej – dla dowolnych czterech punktów A, B, C, D lewa strona powyższej równości jest zawsze większa lub równa od prawej, a równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $ABCD$ jest czworokątem wypukłym, wpisanym w okrąg. Jest to *nierówność Ptolemeusza*, o której napiszę w innym odcinku.

Twierdzenie Ptolemeusza



Wskazówki do zadań

- Otrzymujemy dowód twierdzenia Ptolemeusza.
- Zastosować twierdzenie sinusów. Aby wyprowadzić wzór, przyjąć, że $\beta + \gamma = 90^\circ$.
- Zastosować twierdzenie Ptolemeusza do czworokąta $ADBC$.
- Wykorzystać poprzednie zadanie – łącząc co trzeci wierzchołek dziesięciokąta foremnego, otrzymamy trójkąt równoboczny.
- Zastosować twierdzenie Ptolemeusza do czworokąta $ABDC$ i nierówność trójkąta BCD .
- Niech $ABCD EFG$ będzie siedmiokątem foremnym. Przyjąć się czworokątowi $ABCE$.
- Zastosować twierdzenie Ptolemeusza do czworokątów $ABCP$ i $ABPD$.
- Iloczyn długości przekątnych otrzymany z twierdzenia Ptolemeusza. Poraz ich długości otrzymamy z równości $|AB| \cdot |BC| + |CA| \cdot |AD| = |BD| \cdot |AC|$. Pole trójkąta o bokach a, b, c wpisane w okrąg o promieniu R , jest równe $\frac{abc}{4R}$.
- Niech O oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz niech K, L, M będą odpowiednio środkami odcinków BC, CA, AB . Na czworokątach $AMOL, BKOM$ i $CLOK$ można opisać okręgi. Zapisać dla nich twierdzenie Ptolemeusza oraz skorzystać z tego, że stosunek pola do obwodu trójkąta jest równy połowie promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- Najpierw udowodnić, że istnieje tylko jeden taki ciąg, a następnie zauważyć, że jeśli $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ jest n -kątem foremny, $A_n = A_0$ i $|A_0 A_1| = 1$, to $\sum_{k=0}^{n-1} |A_0 A_k| = |A_0 A_n|$ dla $k = 0, 1, \dots, n$.

Zadania

- Poczuć radość płynącą z zauważenia tego, co się stanie, gdy zastosujemy twierdzenie Ptolemeusza do prostokąta.
- Wykazać, że jeśli $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ oraz $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$, to $\sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma)$. Wyprowadzić stąd wzór na sinus sumy kątów.
- Punkt D leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC . Wykazać, że $|CD| = |AD| + |BD|$.
- Bok dziewięciokąta foremnego ma długość a , jego najkrótsza przekątna d , a najdłuższa f . Wykazać, że $a + d = f$.
- Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $D \neq A$. Udowodnić, że $2|AD| > |AB| + |AC|$.
- Bok siedmiokąta foremnego ma długość a , jego najkrótsza przekątna d , a najdłuższa e . Wykazać, że $\frac{1}{a} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$.
- Punkt P leży na krótszym łuku CD okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia $\frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|}$.
- Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg. Znając $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$, wyznaczyć długości przekątnych tego czworokąta.
- Udowodnić, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości środka okręgu opisanego od boków trójkąta jest równa sumie długości promienia okręgu opisanego i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt (twierdzenie Carnota).
- Ustalmy liczbę naturalną $n \geq 3$. W ciągu (c_0, c_1, \dots, c_n) występują wyłącznie liczby nieujemne. Dla wszystkich całkowitych nieujemnych p, q, r, s , spełniających warunek $p + q + r + s = n$, zachodzi równość $c_p c_r + c_q c_s = c_{p+q} c_{q+r}$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c_2 , jeśli $c_1 = 1$.