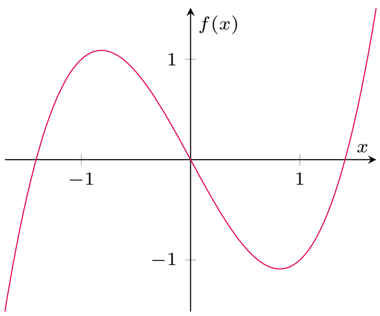
Spokojnie, to tylko wielomian

*Mariusz SKAŁBA**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW



Niech $f(x)=x^3-2x$. Wokół tego prostego wielomianu zogniskują się nasze rozmyślania na przestrzeni tego artykułu. Najpierw wykażemy, że f traktowany jako funkcja $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ jest iniekcją. Załóżmy nie wprost, że istnieją różne $x_1,x_2\in\mathbb{Q}$ takie, że

$$x_1^3-2x_1=x_2^3-2x_2.$$

Przekształcamy powyższą równość:

$$x_1^3-2x_1-x_2^3+2x_2=0 \iff (x_1^3-x_2^3)-2(x_1-x_2)=0.$$

Lewą stronę ostatniego wzoru rozkładamy na czynniki:

$$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2)=0 \Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2=0 \text{ (gdyż } x_1\neq x_2).$$

Wykażemy teraz, że równanie

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=2$$

nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych x_1,x_2. Jeśli $x_1=a/c$, $x_2=b/c$ (gdzie $a,b,c\in\mathbb{Z}$) jest takim rozwiązaniem, to możemy założyć od początku, że $\mathrm{NWD}(a,b,c)=1$. Mamy zatem

$$a^2+ab+b^2=2c^2,$$

skąd wynika natychmiast, że liczby a,b nie mogą być jednocześnie nieparzyste. Otrzymujemy dalej, że obie są parzyste, czyli $a=2A, b=2B$, gdzie $A,B\in\mathbb{Z}$. Równanie przyjmuje postać:

$$4A^2+4AB+4B^2=2c^2 \Rightarrow 2A^2+2AB+2B^2=c^2,$$

zatem również $c=2C$, gdzie $C\in\mathbb{Z}$. Wychodzi na to, że $\mathrm{NWD}(a,b,c)\geqslant 2$ – czyli sprzeczność.

Z drugiej strony wielomian $f(x)$ traktowany jako funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest surjekcją – najprostsze uzasadnienie korzysta z własności Darboux funkcji ciągłych i konstatacji

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad\text{oraz}\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.$$

Podsumujmy:

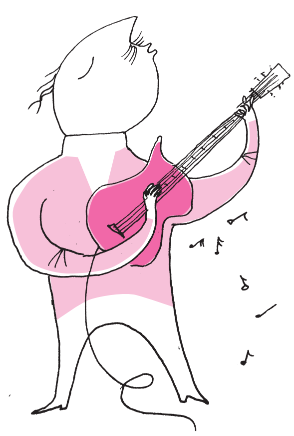
- wielomian $f(x)$ traktowany jako funkcja $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ jest iniekcją, ale nie jest surjekcją, gdyż np. 2 nie jest postaci x^3-2x dla żadnego $x\in\mathbb{Q}$;
- wielomian $f(x)$ traktowany jako funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest surjekcją, ale nie jest iniekcją, gdyż np. $f(\sqrt{2})=f(0)=0$.

Wykażemy teraz główny wynik naszego artykułu:

Istnieje $\mathbb{Q}\subset X\subset\mathbb{R}$ taki, że f dane powyższym wzorem jest bijekcją $f:X\to X$.

Oto dowód. Dla każdej liczby rzeczywistej a rozpatrzmy zbiór $f^{-1}(\{a\})\cap\mathbb{R}$. Jest on niepusty i co najwyżej trójelementowy. Określimy teraz funkcję $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ w następujący sposób. W przypadku, gdy $f^{-1}(\{a\})\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$, to z poprzednich rozważań wynika, że ten zbiór jest jednoelementowy; oznaczmy jego jedyny element przez $g(a)$. W przypadku, gdy $f^{-1}(\{a\})\cap\mathbb{Q}=\emptyset$, określamy $g(a):=\min(f^{-1}(\{a\}))$. W ten sposób określiliśmy funkcję $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, która spełnia warunek

$$f(g(a))=a \quad\text{dla każdego } a\in\mathbb{R}.$$



Możemy teraz określić docelowy zbiór X:

$$X:=\bigcup_{k=0}^{\infty} g^k(\mathbb{Q}),$$

gdzie $g^k(\mathbb{Q})$ oznacza obraz zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ przy k-krotnej iteracji funkcji g (przyjmujemy, że $g^0(x):=x$ dla $x\in\mathbb{R}$).

Wykażemy najpierw, że $f(X)\subset X$. Niech więc $x\in X$ i rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $x\in g^k(\mathbb{Q})$ dla pewnego $k>0$. Wówczas istnieje $w\in\mathbb{Q}$ takie, że $x=g^k(w)$. Mamy

$$f(x)=f(g^k(w))=f(g(g^{k-1}(w)))=g^{k-1}(w)\in X.$$

W pozostałym przypadku $x\in g^0(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ mamy też $f(x)\in\mathbb{Q}=g^0(\mathbb{Q})\subset X$.

Teraz wykażemy, że $f(X)=X$. Niech więc $y\in X$. Zatem $y=g^k(w)$ dla pewnego $k\geqslant 0$ oraz $w\in\mathbb{Q}$. Połóżmy $x:=g(y)$. Wówczas $f(x)=f(g(y))=y$ oraz $x=g^{k+1}(w)\in X$.

Wreszcie wykażemy, że $f:X\to X$ jest różnowartościowa. Niech więc $x_1,x_2\in X$ oraz załóżmy, że $f(x_1)=f(x_2)$. Oznaczmy tę wspólną wartość przez a. Możemy napisać

$$x_1=g^k(w_1),\quad x_2=g^m(w_2),\quad \text{gdzie } k\geqslant 0, m\geqslant 0, w_1,w_2\in\mathbb{Q}.$$

Jeżeli obie liczby k,m są dodatnie, to

$$f(x_1)=f(g^k(w_1))=g^{k-1}(w_1),\quad f(x_2)=f(g^m(w_2))=g^{m-1}(w_2),$$

czyli $g^{k-1}(w_1)=g^{m-1}(w_2)$. Otrzymujemy stąd

$$x_1=g^k(w_1)=g(g^{k-1}(w_1))=g(g^{m-1}(w_2))=g^m(w_2)=x_2.$$

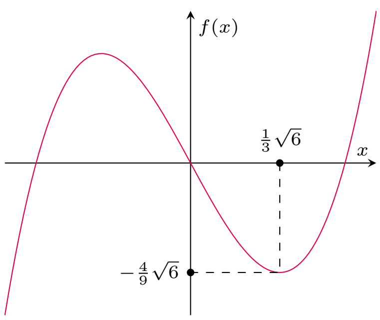
Rozpatrzymy przypadek $k=0$, $m>0$. Teraz $x_1\in\mathbb{Q}$ oraz

$$f(x_1)=g^{m-1}(w_2).$$

Z określenia funkcji g mamy teraz $x_1=g(g^{m-1}(w_2))$, czyli $x_1=x_2$.

W ostatnim przypadku $k=m=0$ powołujemy się na wykazaną wcześniej różnowartościowość funkcji $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ i otrzymujemy $x_1=x_2$.

Zajmiemy się na koniec funkcją $g:X\to X$ pod kątem jej ciągłości w różnych punktach. Jest to funkcja odwrotna do „gładkiej" bijekcji $f:X\to X$. Faktycznie funkcja $f:X\to X$ jest ciągła, ale nazwaliśmy ją „gładką", gdyż jest obcięciem do X wielomianu trzeciego stopnia! Wykażemy natomiast, że g nie jest ciągła w żadnym punkcie zbioru $X\cap(-\frac{4}{9}\sqrt{6},\frac{4}{9}\sqrt{6})$!



Standardowymi metodami analizy matematycznej można uzasadnić, że $-\frac{4}{9}\sqrt{6}$ jest najmniejszą wartością f na dodatniej półprostej, przyjmowaną dla argumentu $\frac{1}{3}\sqrt{6}$. Łatwo wynika stąd, że dla dowolnego $y\in X\cap(-\frac{4}{9}\sqrt{6},\frac{4}{9}\sqrt{6})$ istnieją $x_1,x_2\in f^{-1}(y)$ takie, że $x_1<-\frac{1}{3}\sqrt{6}$ oraz $x_2>\frac{1}{3}\sqrt{6}$. Oczywiście $x_1<x_2$ oraz $f(x_1)=f(x_2)=y$. Niech teraz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o wyrazach wymiernych zbieżnym do x_1, natomiast $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem o wyrazach wymiernych zbieżnym do x_2. Ponieważ f jest wszędzie ciągła, więc $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(x_1)=y$ oraz $\lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(x_2)=y$. Mamy dalej

$$\lim_{n\to\infty}g(f(a_n))=\lim_{n\to\infty}a_n=x_1 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty}g(f(b_n))=\lim_{n\to\infty}b_n=x_2,$$

czyli, na mocy definicji Heinego, g nie może być ciągła w y.

Wyszło na to, że zwykła bijekcja $f:X\to X$ ma dość niezwykłą bijekcję odwrotną g – ale moderując zaistniałą sytuację w duchu tytułu, uspokójmy Czytelników: *konstruując funkcję g, nie skorzystaliśmy nawet z pewnika wyboru!*

Matematyczny kącik muzyczny IV: O tym, jak przydatne jest dudnienie

*Konstanty KOSTRZEWSKI**

*Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W numerze Δ^8_{20} omówiliśmy sposoby strojenia instrumentów, jakie ludzkość opracowała na przestrzeni wieków. Ta część problemu jest natury koncepcyjnej i daje się cała opisać na kartce papieru. Ostatecznie jednak chcemy, by stojący obok nas instrument (na przykład fortepian) był nastrojony, a sama kartka papieru zapisana obliczeniami, jak potrzebne by one nie były, nie rozwiąże za nas tego problemu. Żyjemy w czasach, w których dostępne są urządzenia elektroniczne oraz przeróżne aplikacje wspomagające nas w strojeniu instrumentów, najczęściej gitary. Pojawia się pytanie: w jaki sposób radzono sobie w czasach, gdy takich „wspomagaczy" nie było?

Oczywiście muzycy mają statystycznie lepszy słuch i są wrażliwi na różnice pomiędzy dźwiękami. Dlatego dużo łatwiej jest im zbliżyć się do zgodnego brzmienia. Gdy różnica pomiędzy częstotliwościami obu dźwięków jest jednak niewielka, nawet wprawne ucho może mieć trudności z jej wychwyceniem. W tej sytuacji wykorzystuje się tzw. *zjawisko dudnienia.*